Version: Spanish.

PRIMER DIA
Tokio, 13 de julio de 2003.

Problema 1. Sea A un subconjunto del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ con 101 elementos exactamente. Demostrar que existen números $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ en S tales que los conjuntos

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

son disjuntos dos a dos.

Problema 2. Determinar todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

es un entero positivo.

Problema 3. Consideremos un hexágono convexo tal que para cualesquiera dos lados opuestos se verifica la siguiente propiedad: la distancia entre sus puntos medios es igual a $\sqrt{3}/2$ multiplicado por la suma de sus longitudes. Demostrar que todos los ángulos del hexágono son iguales.

(Un hexágono convexo $ABCDEF$ tiene tres parejas de lados opuestos: AB y DE, BC y EF, CD y FA.)

Tiempo: 4 horas y media.
Cada problema vale 7 puntos.

Version: Spanish.

SEGUNDO DIA
Tokio, 14 de julio de 2003.

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cuyos vértices están sobre una circunferencia. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares trazadas desde D a las rectas BC, CA y AB respectivamente. Demostrar que $PQ = QR$ si y sólo si las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ADC$ se cortan sobre la recta AC.

Problema 5. Sea n un entero positivo, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales tales que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

(a) Demostrar que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2\,.$$

(b) Demostrar que se cumple la igualdad si y sólo si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forman una progresión aritmética.

Problema 6. Sea p un número primo. Demostrar que existe un número primo q tal que, para todo entero n, el número $n^p - p$ no es divisible por q.

Tiempo: 4 horas y media.
Cada problema vale 7 puntos.