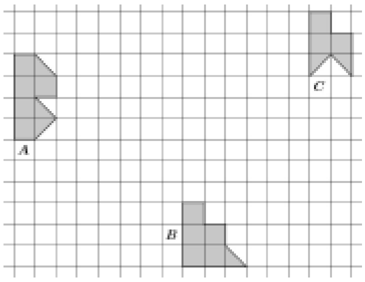
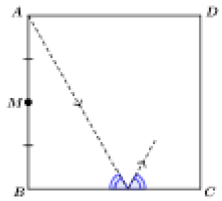
11ª Olimpiada Iraní de Geometría
Nivel elemental: alumnos de 7º y 8º grados
18 de octubre de 2024

Los problemas de la prueba son confidenciales hasta que se publiquen en el sitio oficial de la IGO en la web: *http://igo-official.com*

Problema 1. Abdul reflejó la figura *A* con respecto a una recta que llamamos ℓ_A, también reflejó la figura *B* con respecto a una recta que llamamos ℓ_B y luego rotó la figura *C* haciendo centro en un punto de la cuadrícula. De este modo obtuvo con las tres figuras, en conjunto, un cuadrado de 4×4, sin huecos ni superposiciones. Identificar las rectas ℓ_A, ℓ_B y el centro de la rotación, y además mostrar en el gráfico las figuras *A*, *B*, *C* después de estos tres movimientos.



Problema 2. Sea *ABCD* un cuadrado de lado 20. Un rayo de luz sale de *A* y se refleja sucesivamente en los lados *BC*, *CD* y *DA* para finalizar su recorrido en el punto medio *M* del lado *AB*. Calcular la longitud el camino recorrido por el rayo de luz.



Problema 3. Abdul eligió un punto *T* en el interior de un cuadrilátero convexo *ABCD*, con $BC > AD$. El punto *S* del segmento *AT* satisface que $DT = BC$ y $T\hat{S}D = 90^\circ$.
Demostrar que si $D\hat{T}A + T\hat{A}B + A\hat{B}C = 180^\circ$ entonces $AB + ST \geq CD + AS$.
ACLARACIÓN. Un cuadrilátero es *convexo* si todos sus ángulos miden menos de 180º.

Problema 4. Un polígono inscrito de *n* lados (donde $n > 3$) se divide en $n-2$ triángulos mediante diagonales que solo se cortan en sus vértices. ¿Cuál es la mayor cantidad de triángulos congruentes que puede tener una tal división?
ACLARACIÓN: Un polígono *inscrito* es el que tiene todos sus vértices sobre una circunferencia,

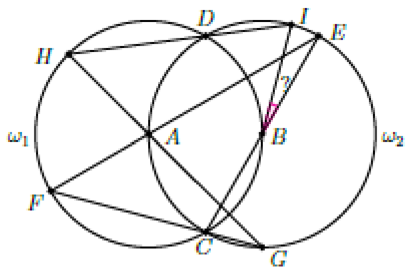
Problema 5. Sea *ABC* un triángulo acutángulo. Los puntos *Y*, *Z* pertenecen al menor arco BC del circuncírculo del triángulo *ABC* (*Y* está en el menor arco BZ). Sea *X* un punto tal que los triángulos *ABC* y *XYZ* son semejantes, con *A* y *X* del mismo lado de la recta *YZ*. Las rectas *XY* y *XZ* cortan a los lados *AB* y *AC* en los puntos *E* y *F* respectivamente. Sea *K* el punto de intersección de las rectas *BY* y *CZ*. Demostrar que uno de los puntos de intersección de los circuncírculos de los triángulos *AEF* y *KBC* pertenece a la recta *KX*.
ACLARACIÓN: El *circuncírculo* de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices. Dos triángulos son *semejantes* si tienen sus ángulos correspondientes iguales. En nuestro problema, $\hat{A} = \hat{X}$, $\hat{B} = \hat{Y}$, $\hat{C} = \hat{Z}$.

Tiempo: 4 horas
Cada problema vale 8 puntos

11ª Olimpiada Iraní de Geometría
Nivel medio: alumnos de 9º y 10º grados
18 de octubre de 2024

Los problemas de la prueba son confidenciales hasta que se publiquen en el sitio oficial de la IGO en la web: *http://igo-official.com*

Problema 1. En la figura, los puntos *A* y *B* son los centros de las circunferencias ω_1 y ω_2. Comenzando con la recta *BC* se obtienen sucesivamente los puntos *E*, *F*, *G*, *H*, *I*. Calcular el ángulo $I\hat{B}E$.



Problema 2. Los puntos *X*, *Y* pertenecen al lado *CD* de un pentágono convexo *ABCDE*, con *X* ubicado entre *Y* y *C*. Supongamos que los triángulos *XCB*, *ABX*, *AXY*, *AYE*, *YED* son todos semejantes (con exactamente ese orden en los vértices). Demostrar que los circuncírculos de los triángulos *ACD* y *AXY* son tangentes.
ACLARACIÓN: Un pentágono es *convexo* si todos sus ángulos miden menos de 180º.
El *circuncírculo* de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

Problema 3. Sean *ABC* un triángulo acutángulo y *D* un punto del lado *BC*. Sea *J* el punto del lado *AC* tal que $B\hat{A}D = 2A\hat{D}J$, y sea ω el circuncírculo del triángulo *CDJ*. La recta *AD* interseca nuevamente a ω en el punto *P*, y *Q* es el pie de la altura trazada desde *J* a *AB*.
Demostrar que si $JP = JQ$ entonces la recta perpendicular a *DJ* trazada por *A* es tangente a ω.

Problema 4. Eric armó un polígono convexo *P* utilizando, sin huecos ni superposiciones, una cantidad finita de figuras poligonales, todas ellas con un centro de simetría pero no necesariamente congruentes o convexas. Demostrar que *P* tiene un centro de simetría.

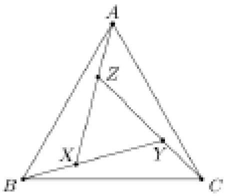
Problema 5. Sea *P* el punto de intersección de las diagonales *AC* y *BD* del trapecio *ABCD*, con $AB \parallel CD$. Las simétricas de las rectas *AD* y *BC* con respecto a las bisectrices interiores de los ángulos $P\hat{D}C$ y $P\hat{C}D$ cortan a los circuncírculos de los triángulos *APD* y *BPC* en D' y C' respectivamente. La recta $C'A$ corta nuevamente al circuncírculo del triángulo *BPC* en *Y*, y la recta $D'C$ corta nuevamente al circuncírculo del triángulo *APD* en *X*. Demostrar que *P*, *X*, *Y* son colineales.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

11ª Olimpiada Iraní de Geometría
Nivel avanzado: alumnos de 11º y 12º grados
18 de octubre de 2024

Los problemas de la prueba son confidenciales hasta que se publiquen en el sitio oficial de la IGO en la web: *http://igo-official.com*

Problema 1. Se divide un triángulo equilátero en 4 triángulos de áreas iguales: tres triángulos congruentes *ABX*, *BCY*, *CAZ*, y un triángulo equilátero más pequeño *XYZ*, como muestra la figura.
Demostrar que los puntos *X*, *Y*, *Z* pertenecen al incírculo del triángulo *ABC*.
ACLARARACIÓN: El *incírculo* de un triángulo es la circunferencia tangente a sus tres lados. Su centro es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo.



Problema 2. En un cuadrilátero cíclico *ABCD* sea *P* un punto del lado *CD* tal que $C\hat{B}P = 90^{\circ}$. Sea *K* el punto de intersección de *AC* y *BP* tales que $AK = AP = AD$. Sea *H* la proyección de *B* sobre la recta *AC*. Demostrar que $A\hat{P}H = 90^{\circ}$.
ACLARARACIÓN: un cuadrilátero *cíclico* es el que tiene sus 4 vértices sobre una circunferencia.

Problema 3. En el triángulo *ABC* sea *D* el pie de la altura trazada desde *A* al lado *BC* y sean I, I_A, I_C el incentro, el excentro correspondiente a *A*, el excentro correspondiente a *C*, respectivamente. Sean $P \neq B$ y $Q \neq D$ los otros puntos de intersección de la circunferencia BDI_C con las rectas *BI* y DI_A respectivamente. Demostrar que $AP = AQ$.
ACLARARACIÓN: El *incentro* es el centro del incírculo. El *excentro correspondiente a X* en un triángulo *XYZ* es el centro de la circunferencia tangente a las prolongaciones de los lados *XY* y *XZ*, y también tangente al lado *YZ*.

Problema 4. En un triángulo acutángulo *ABC* sea *P* un punto interior tal que $B\hat{P}C = 90^{\circ}$ y $B\hat{A}P = P\hat{A}C$. Sea *D* la proyección de *P* sobre el lado *BC*. Sean *M* y *N* los incentros de los triángulos *ABD* y *ADC* respectivamente. Demostrar que el cuadrilátero *BMNC* es cíclico.

Problema 5. Sea *ABCD* un cuadrilátero con circuncírculo ω. Sea *E* un punto fijo del segmento *AC*. Sea *M* un punto de ω, y sea *P* el punto de intersección de las rectas *AM* y *BD*. La recta *EP* corta a las rectas *AB* y *AD* en los puntos *R* y *Q* respectivamente; *S* es la intersección de *BQ* y *DR*, y las rectas *MS* y *AC* se cortan en *T*. Demostrar que, al variar *M*, el circuncírculo del triángulo *CMT* pasa por un punto fijo distinto de *C*.
ACLARARACIÓN: El *circuncírculo* de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos