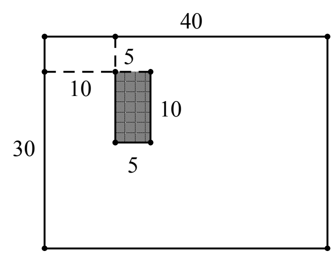
5^a Olimpiada Iraní de Geometría

Nivel elemental: alumnos de 7º y 8º grados

Los problemas de la prueba son confidenciales hasta que se publiquen en el sitio official de la IGO en la web: *http://igo-official.ir*

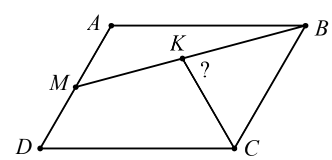
---

1. La figura muestra un papel de 40×30 que contiene un rectángulo gris de 10×5. Queremos recortar del papel el rectángulo gris haciendo 4 cortes rectos. Cada corte recto divide al papel en dos pedazos a lo largo de una línea recta y conservamos el pedazo que contiene al rectángulo gris. El objetivo es minimizar la longitud total de los cortes. ¿Cómo se puede lograr este objetivo y cuál es la longitud total mínima? Mostrar los cortes correctos y escribir la respuesta final. No es necesario demostrar nada.



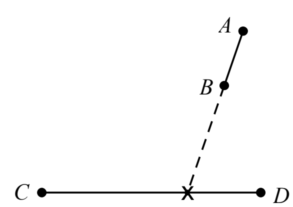
2. El hexágono convexo $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ está en el interior del hexágono convexo $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ de modo que sus lados son respectivamente paralelos, es decir,
$A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, ..., $A_6A_1 \parallel B_6B_1$. Demostrar que las áreas de los hexágonos simples $A_1B_2A_3B_4A_5B_6$ y $B_1A_2B_3A_4B_5A_6$ son iguales. (Un hexágono simple es un hexágono que no se entrecruza a sí mismo.)

3. En la figura, *ABCD* es un paralelogramo. Sabemos que $\widehat{D}=60^{\circ}$, $AD=2$ y $AB=\sqrt{3}+1$. *M* es el punto medio del segmento *AD*. El segmento *CK* es la bisectriz del ángulo $\widehat{C}$. Calcular la medida del ángulo $B\widehat{K}C$.

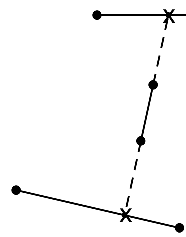


4. En el plano está dada la circunferencia ω. Dos circunferencias con centros O_1, O_2 están dentro de ω y son tangentes a ω. La cuerda *AB* de ω es tangente a las dos circunferencias mencionadas de modo que estas dos circunferencias están en lados opuestos de la cuerda. Demostrar que
$O_1\widehat{A}O_2 + O_1\widehat{B}O_2 > 90^{\circ}$.

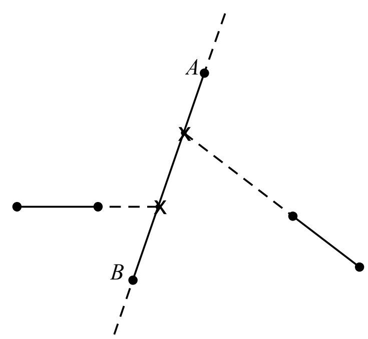
5. Hay algunos segmentos en el plano de modo que no haya dos de ellos que se corten o se toquen (ni siquiera en sus extremos.). Diremos que el segmento *AB rompe* al segmento *CD* si la prolongación de *AB* corta a *CD* en algún punto comprendido entre *C* y *D*.



(a) ¿Es posible que cada segmento, al prolongarlo en ambos sentidos, rompa a exactamente un segmento en cada una de sus dos prolongaciones?



(b) Diremos que un segmento está *rodeado* si a cada lado de la recta que lo contiene hay exactamente un segmento que lo rompe (por ejemplo, el segmento AB de la figura). ¿Es posible tener un conjunto en el que todos los segmentos estén rodeados?



Tiempo: 4 horas
Cada problema vale 8 puntos

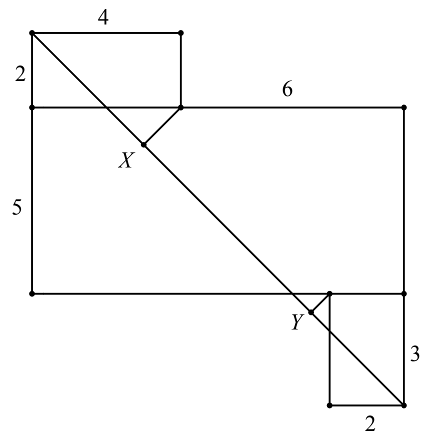
5^a Olimpiada Iraní de Geometría

Nivel Medio: alumnos de 9º y 10º grados

Los problemas de la prueba son confidenciales hasta que se publiquen en el sitio official de la IGO en la web: *http://igo-official.ir*

---

1. En la figura hay tres rectángulos. Se han indicado las longitudes de algunos segmentos. Calcular la longitud del segmento *XY*.



2. En un cuadrilátero convexo *ABCD* las diagonales *AC* y *BD* se cortan en el punto *P*. Sabemos que $D\widehat{A}C = 90^\circ$ y $2A\widehat{D}B = A\widehat{C}B$. Si tenemos que $D\widehat{B}C + 2A\widehat{D}C = 180^\circ$, demostrar que $2AP = BP$.

3. Sean ω_1, ω_2 dos circunferencias de centros O_1, O_2 respectivamente. Estas circunferencias se cortan en *A* y *B*. La recta O_1B corta por segunda vez a ω_2 en *C*, y la recta O_2A corta por segunda vez a ω_1 en *D*. Sean *X* el segundo punto de intersección de *AC* con ω_1, *Y* el segundo punto de intersección de *BD* con ω_2. Demostrar que $CX = DY$.

4. Se tiene un poliedro con todas sus caras triangulares. Sea *P* un punto arbitrario de una arista del poliedro tal que *P* no es ni el punto medio ni un extremo de esa arista. Definimos $P_0 = P$. En cada paso conectamos P_i con el baricentro de una de las caras que lo contienen. Esta recta corta nuevamente al perímetro de esa cara en P_{i+1}. Continuamos este proceso con P_{i+1} y la otra cara que contiene a P_{i+1}. Demostrar que continuando este procedimiento es imposible pasar por todas las caras.

Nota. El baricentro es el punto de intersección de las medianas.

5. Sea *ABCD* un paralelogramo tal que $D\widehat{A}C = 90^\circ$. Sea *H* el pie de la perpendicular trazada desde *A* a *DC*, y sea *P* un punto de la recta *AC* tal que la recta *PD* es tangente a la circunferencia circunscrita del triángulo *ABD*. Demostrar que $P\widehat{B}A = D\widehat{B}H$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

5ª Olimpiada Iraní de Geometría

Nivel Avanzado: alumnos de 11º y 12º grados

Los problemas de la prueba son confidenciales hasta que se publiquen en el sitio official de la IGO en la web: *http://igo-official.ir*

---

1. Dos circunferencias ω_1, ω_2 se cortan en A y B. Sea PQ una tangente común a estas dos circunferencias con P en ω_1 y Q en ω_2. Consideramos un punto arbitrario X de ω_1. La recta AX corta por segunda vez a ω_2 en Y. El punto $Y' \neq Y$ de ω_2 es tal que $QY = QY'$. La recta $Y'B$ corta por segunda vez a ω_1 en X'. Demostrar que $PX = PX'$.

2. El triángulo acutángulo ABC tiene $\widehat{A} = 45^{\circ}$. Los puntos O y H son el circuncentro y el ortocentro de ABC respectivamente. D es el pie de la altura trazada desde B. El punto X es el punto medio del arco $\overset{\frown}{AH}$ de la circunferencia circunscrita del triángulo ADH que contiene a D. Demostrar que $DX = DO$.

3. Hallar todos los valores posibles del entero $n > 3$ tal que existe un polígono convexo de n lados tal que cada diagonal es la mediatriz de al menos otra diagonal.

4. El cuadrilátero $ABCD$ está circunscrito alrededor de una circunferencia. Las diagonales AC y BD no son perpendiculares. Las bisectrices de los ángulos entre estas diagonales cortan a los segmentos AB, BC, CD, DA en los puntos K, L, M, N. Se sabe que $KLMN$ es cíclico; demostrar que $ABCD$ es cíclico.

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Una circunferencia que pasa por A y B es tangente al segmento CD en el punto E. Otra circunferencia, que pasa por C y D es tangente a AB en el punto F. El punto G es el punto de intersección de AE y DF, y el punto H es el punto de intersección de BE y CF. Demostrar que los incentros de los triángulos AGF, BHF, CHE, DGE están en una circunferencia.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos