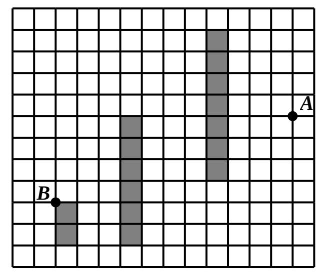
Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría
Nivel Elemental: alumnos de 7º y 8º grados

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de IGO.*

1. Alí quiere ir del punto *A* al punto *B*. Está prohibido pasar por el interior de las áreas grises, pero se puede pasar en cualquier dirección dentro de las áreas blancas (no solo por líneas de la cuadrícula pero por todo el plano). Tenés que ayudar a Alí a encontrar el camino más corto entre *A* y *B*. Solo hay que dibujar el camino y escribir su longitud (cada cuadrito tiene lado 1).



2. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo *ABC* con $AC > AB$. Sean *X* un punto del lado *AC* e *Y* un punto de la circunferencia ω tal que $CX = CY = AB$. (Los puntos *A* e *Y* están en semiplanos distintos con respecto a la recta *BC*). La recta *XY* corta a ω por segunda vez en *P*. Demostrar que $PB = PC$.

3. Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo sin lados paralelos. Cada dos lados consecutivos del *ABCD* se construye un paralelogramo usando esos dos lados consecutivos como lados del paralelogramo. Demostrar que entre los 4 nuevos puntos hay un solo punto en el interior del cuadrilátero *ABCD*.

ACLARACIÓN: Un cuadrilátero es convexo si no tiene entrecruzamientos y todos sus ángulos son menores de 180º.

4. En un triángulo rectángulo *ABC* ($A = 90^{\circ}$), la mediatriz de *BC* corta a la recta *AC* en *K* y la mediatriz de *BK* corta a la recta *AB* en *L*. Si la recta *CL* es la bisectriz del ángulo C, hallar todos los posibles valores de los ángulos B y C.

5. Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo con las siguientes propiedades:

$ADC = 135^{\circ}$ y $ADB - ABD = 2DAB = 4CBD$.

Si $BC = \sqrt{2}CD$, demostrar que $AB = BC + AD$.

Tiempo: 3 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría
Nivel Medio: alumnos de 9º y 10º grados

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de IGO.*

1. En el trapecio *ABCD* con $AB \parallel CD$, ω_1 y ω_2 son dos circunferencias de diámetros *AD* y *BC* respectivamente. Sean *X* e *Y* dos puntos arbitrarios en ω_1 y ω_2 respectivamente. Demostrar que la longitud del segmento *XY* es menor o igual que la mitad del perímetro de *ABCD*.

2. Dos circunferencias C_1 y C_2 se cortan en *A* y *B*. La tangente a C_1 trazada por *A* corta a C_2 en *P* y la recta *PB* corta a C_1 por segunda vez en *Q* (suponer que *Q* está afuera de C_2). La tangente a C_2 trazada por *Q* corta a C_1 y C_2 en *C* y *D* respectivamente. (Los puntos *A* y *D* están en distintos semiplanos con respecto a la recta *PQ*.) Demostrar que *AD* es bisectriz del ángulo CAP.

3. Hallar todos los enteros positivos *N* tales que existe un triángulo que se puede dividir en *N* cuadriláteros semejantes.

4. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo *ABC* ($A = 90^\circ$). La tangente a ω trazada por *A* corta a la recta *BC* en *P*. Supongamos que *M* es el punto medio del (menor) arco AB, y *PM* corta a ω por segunda vez en *Q*. La tangente a ω trazada por *Q* corta a la recta *AB* en *K*. Demostrar que $PKC = 90^\circ$.

5. Las circunferencias ω y ω' se cortan en *A* y *B*. La tangente a ω trazada por *A* corta a ω' en *C* y la tangente a ω' trazada por *A* corta a ω en *D*. Supongamos que la bisectriz interior de CAD corta a ω y ω' en *E* y *F* respectivamente, y la bisectriz exterior de CAD corta a ω y ω' en *X* e *Y* respectivamente. Demostrar que la mediatriz de *XY* es tangente a la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo *BEF*.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría
Nivel Avanzado: alumnos de 11º y 12º grados

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de IGO.*

1. Las circunferencias ω y ω' se cortan en *A* y *B*. La tangente a ω trazada por *A* corta a ω' en *C* y la tangente a ω' trazada por *A* corta a ω en *D*. Supongamos que el segmento *CD* corta a ω y ω' en *E* y *F* respectivamente (suponer que *E* está entre *F* y *C*). La perpendicular a *AC* trazada por *E* corta a ω' en *P* y la perpendicular a *AD* trazada por *F* corta a ω en el punto *Q*. (Los puntos *A*, *P* y *Q* están del mismo lado de la recta *CD*.) Demostrar que los puntos *A*, *P* y *Q* son colineales.

2. En el triángulo acutángulo *ABC*, la altura trazada desde *A* corta al lado *BC* en *D*, y *M* es el punto medio de *AC*. Supongamos que *X* es un punto tal que $AXB = DXM = 90^{\circ}$ (suponer que *X* y *C* están en semiplanos opuestos respecto de la recta *BM*). Demostrar que $XMB = 2MBC$.

3. Sea *P* el punto de intersección de los lados *AD* y *BC* del cuadrilátero convexo *ABCD*. Supongamos que I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos *PAB* y *PDC* respectivamente. Sea *O* el circuncentro del triángulo *PAB* y *H* el ortocentro del triángulo *PDC*. Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos AI_1B y *DHC* son tangentes entre sí si y solo sí las circunferencias circunscritas de los triángulos *AOB* y DI_2C son tangentes entre sí.

4. En un cuadrilátero convexo *ABCD* las rectas *AB* y *CD* se cortan en *E* y las rectas *AD* y *BC* se cortan en *F*. Sea *P* el punto de intersección de las diagonales *AC* y *BD*. Supongamos que ω_1 es una circunferencia que pasa por *D* y es tangente a *AC* en *P*. También supongamos que ω_2 es una circunferencia que pasa por *C* y es tangente a *BD* en *P*. Sea *X* el punto de intersección de ω_1 y *AD*, e *Y* el punto de intersección de ω_2 y *BC*. Supongamos que las circunferencias ω_1 y ω_2 se cortan por segunda vez en *Q*. Demostrar que la perpendicular trazada desde *P* a la recta *EF* pasa por el circuncentro del triángulo *XQY*.

5. ¿Existen seis puntos del plano $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ tales que todos los triángulos $X_iY_jZ_k$ son semejantes para $1 \le i, j, k \le 2$?

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos