Residencia Matemática:

desde el 1ro de junio de 2010, todos los martes hasta el receso de julio de 18 a 20 hs. en el Instituto González Pecotche, Coronel Díaz 1774, Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

¿QUÉ CONOCE UD. DE POLINOMIOS?

Natalio H. Guersenzvaig

El objetivo principal del curso es que los participantes se familiaricen con las definiciones, terminología y propiedades más importantes de ciertos objetos matemáticos llamados polinomios. Contarán entonces con los recursos necesarios para enfrentar ciertas cuestiones relativas a la enseñanza del tema en el nivel secundario, y también a la hora de resolver problemas. Entre tales cuestiones se encuentra la que ahora enfrenta quien escribe, a saber ¿cómo transmitir al interlocutor, de manera sencilla e interesante, un conocimiento técnico que es el producto de siglos de investigación matemática? El camino elegido es el de la interacción entre teoría y práctica, pues conduce a la "independencia intelectual" del alumno respecto de sus tutores (lo cual debería ser uno de los objetivos de la enseñanza en cualquier nivel). En particular invito a los lectores interesados a dar respuestas apropiadas a las preguntas siguientes (cada una de las cuales se refiere a algún hecho importante de la teoría de polinomios):

(1) ¿Qué es un polinomio?

(2) ¿Constituyen los polinomios un ejemplo de alguna estructura algebraica específica?

(3) Un prisma rectangular con aristas de longitudes a, b, c (en cm) tiene área $144\,\mathrm{cm}^2$ y volumen $109\,\mathrm{cm}^3$. Se sabe además que $a+b+c=15$. Halle la suma de los volúmenes de tres cubos cuyas aristas tienen longitudes a, b, c.

(4) Como sabemos, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos del plano, digamos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, está dada por

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0).$$

¿Puede expresar de manera semejante la ecuación de la parábola cuadrática de eje vertical que pasa por tres puntos no alineados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$? Con mayor generalidad, si $x_0, \dots, x_n$ son números reales distintos entre si y $y_0, \dots, y_n$ son números reales cualesquiera ¿puede dar la ecuación de alguna curva que pase por los $n + 1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$?

(5) El llamado Teorema del resto establece que el resto r de dividir un polinomio $P(X)$ por $X - a$ es el valor de P en $x = a$ (esto es, $r = P(a)$). ¿Puede hallar fórmulas para los restos de dividir $P(X)$ por $(X - a)^2$, $(X - a)(X, -b)$ y $(X - a)^2(X, -b)$, donde $a \neq b$?.

(6) ¿Puede hallar un múltiplo común, con el menor grado posible, de los polinomios

$$P(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - -2X + 2 \ \text{ y } \ Q(X) = X^4 - X^3 + X^2 + 2.$$

(7) ¿Es el número real $\sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}$ un número entero?

(8) ¿Que se puede hacer para determinar si un polinomio no constante con coeficientes racionales se puede factorear sobre los racionales (es decir, si puede expresarse como producto de dos o más polinomios no constantes con coeficientes racionales)? Por ejemplo, como resolvería tal cuestión si

$$P(X) = 3X^4 - 6X^3 - 9X + 1.$$

(9) Ciertamente el polinomio $X^2 + 1$ no se puede factorear sobre los reales (o sea, $X^2 + 1$ es irreducible sobre los reales). ¿es verdad que lo mismo ocurre con el polinomio $X^4 + 1$? Con mayor generalidad, ¿es verdad que los polinomios con coeficientes reales de grado mayor o igual que dos sin raíces reales no se pueden factorear sobre los reales?

(10) ¿Qué se está exigiendo cuando se pide factorear completamente sobre los reales un polinomio dado?, ¿Puede hacer tal cosa con el polinomio

$$P(X) = X^{10} - 1024?$$

(11) ¿Puede hallar el área encerrada por el eje x, las rectas $y = 0$, $y = 1$ y la curva

$$y = \frac{x^2 + 3}{32 + 16x - 2x^4 - x^5}?$$

(12) ¿Puede hallar (si es que existen) los puntos del plano donde se cortan las curvas

$$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$$
$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 1 = 0?$$

Finalmente, cabe decir que para mi sería mucho más que satisfactorio si el lector dedicado a la docencia en el nivel medio encuentra en este curso respuesta a su problema, análogo al mio, en relación con sus alumnos.

Bibliografía

Entre los muchos excelentes libros sobre polinomios, o que incluyen capítulos sobre polinomios, se recomiendan los siguientes.

1 - Barbeau, E. J.; *Polynomials*, Springer, 1995.

2 - Faadieev, D. y Sominski,I.; *Problemas de Algebra Superior*, Mir, 1980.

3 - Gentile, E. R.; *Notas de Algebra I*, Eudeba, 1973.

4 - Gentile, E. R.; *Anillos de Polinomios*, Docencia, 1980.

5 - Kurosh, A. G.; *Curso de Algebra Superior*, Mir, 1975.

6 - Sadosky, M.; *Cálculo Numérico y Gráfico*, ED. Librería del Colegio, 1955.

7 - Uspensky, J. V.; *Theory of Equations*, McGraw-Hill, 1963. (Hay una versión en español, *Teoría de Ecuaciones*, Centro de Estudiantes La Linea Recta, Facultad de Ingenieria UBA, 1958.)

Información altamente confiable y sumamente interesante sobre la vida y obra de los matemáticos más importantes desde la antiguedad hasta mediados del siglo XX puede hallarse en el libro siguiente:

8 - Boyer, Carl B.; *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, 1994.

Informes e inscripción:
mariano@oma.org.ar
Costo por la participación en la Residencia $ 60.-
Para profesores y maestros con alumnos participantes en cualquiera de los Certámenes, Competencias y Torneos de la Olimpíada Matemática Argentina, sólo $ 20.-