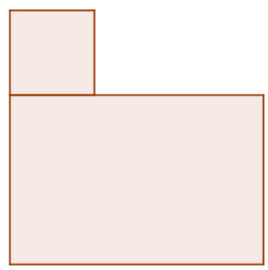
TORNEO DE LAS CUENCAS

2013 Primera Ronda Soluciones

PRIMER NIVEL

Problema 1- La figura adjunta está formada por un rectángulo y un cuadrado. Trazar una recta que la divida en dos figuras de igual área. Justificar la respuesta.



Solución: Se puede usar el siguiente principio:

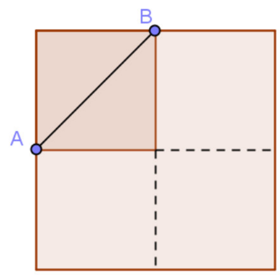
Una recta que pase por el centro (punto de intersección de las diagonales) de un paralelogramo, divide al mismo en dos regiones iguales. (La demostración de este hecho está en las soluciones de los problemas del Torneo del año pasado).

De modo que la recta que una los centros del cuadrado y del rectángulo, dividirá a cada uno de éstos en figuras iguales y consecuentemente, a la figura dada en dos figuras de igual área.

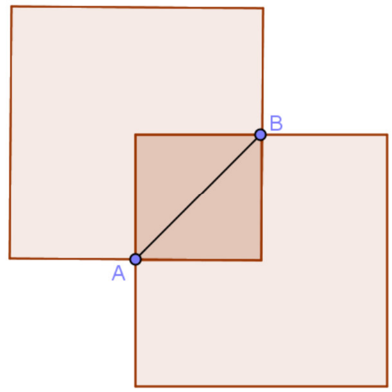
Problema 2- Los puntos A y B son los puntos medios de dos lados consecutivos de dos cuadrados diferentes. Reconstruir los cuadrados a partir de estos dos puntos, indicando los pasos realizados.

Solución: Observemos primero lo siguiente:

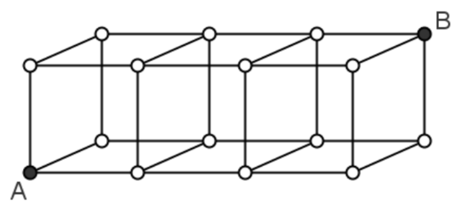
Los puntos medios A, B de dos lados consecutivos de un cuadrado, el centro del cuadrado y un vértice del cuadrado son los vértices de otro cuadrado que tiene por diagonal al segmento AB.



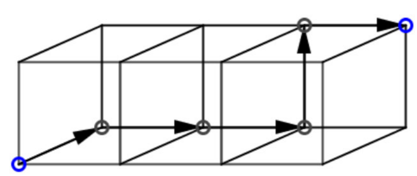
Construyamos entonces un cuadrado que tenga el segmento AB por diagonal. Cada vértice de la otra diagonal de este cuadrado son centro y vértice de los cuadrados buscados.



Problema 3- Dados tres cubos unidos como ilustra la figura, hallar el número de caminos desde A hasta B, considerando que cada camino se compone de exactamente 5 aristas.



Solución: Para realizar un camino sobre las aristas, se puede ir hacia la derecha, hacia arriba o hacia el frente. De manera que cada camino puede ser identificado con una secuencia de cinco letras formada con 3 letras D (derecha) una letra A (arriba) y una letra F (al frente), justamente la que describe el recorrido. Por ejemplo, la secuencia FDDAD se identifica con el camino:



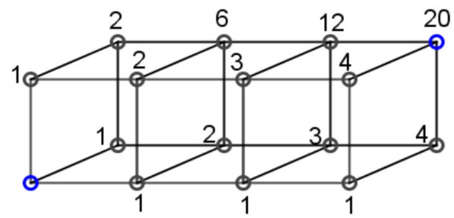
Para enumerar los caminos, bastará enumerar estas secuencias:

DDDAF, DDDFA, DDADF, DDFDA, DDAFD, DDFAD, DADDF, DFDDA, DADFD, DFDAD, DAFDD, DFADD, ADDDF, FDDDA, ADDFD, FDDAD, ADFDD, FDADD, AFDDD, FADDD

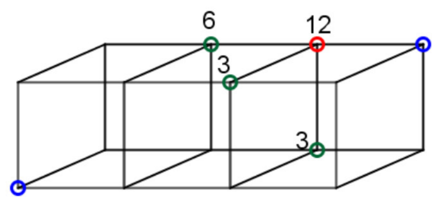
Es decir un total de 20 caminos.

Otra forma:

En cada punto intermedio anotamos cuantos caminos hay que llegan desde A:



Para conseguir esto, notamos que el número de caminos que llegan a un punto es igual a la suma de los números de caminos que llegan a los puntos vecinos precedentes, por ejemplo:



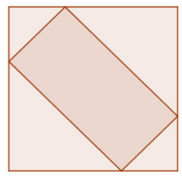
Los caminos que llegan al punto rojo, pasaron por uno de los puntos verdes, dado que 6 caminos entran por uno de éstos y 3 caminos por los otros dos puntos, el total será 6+3+3=12 caminos hasta el punto rojo.

TORNEO DE LAS CUENCAS

2013 Primera Ronda Soluciones

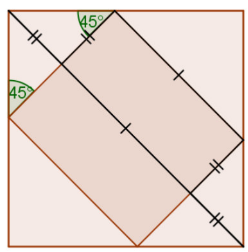
SEGUNDO NIVEL

Problema 1- En un cuadrado cuya diagonal mide 2cm se ha inscripto un rectángulo con sus lados paralelos a las diagonales del cuadrado, como ilustra la figura.



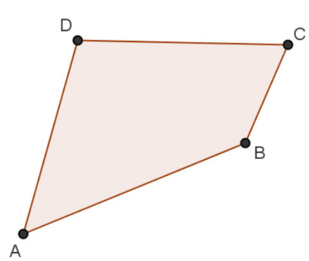
Hallar el perímetro del rectángulo.

Solución: En la figura:



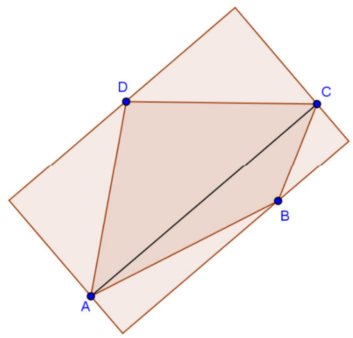
puede observarse que cualquiera sea el rectángulo inscripto con sus lados paralelos a las diagonales del cuadrado, se forman en las esquinas del cuadrado triángulos rectángulos isósceles. Las alturas de dos de estos triángulos, formados en vértices opuestos del cuadrado, quedan sobre diagonal que une estos vértices, ya que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí. De modo que, como lo ilustra la figura, medio perímetro del rectángulo mide lo mismo que la diagonal del cuadrado, y en consecuencia el perímetro del rectángulo será 4 cm.

Problema 2- Dado el cuadrilátero ABCD, construir con regla y compás un rombo con la misma área.

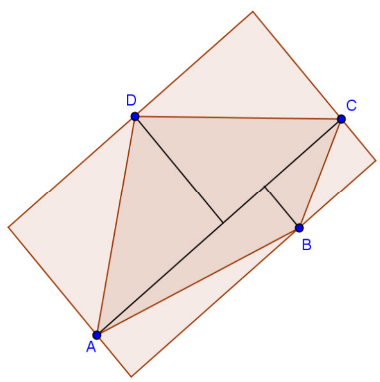


Justifique el procedimiento utilizado.

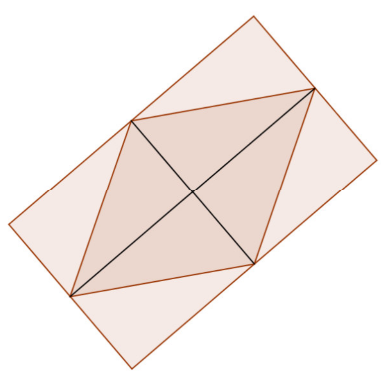
Solución: Inscribimos el cuadrilátero en un rectángulo trazando paralelas a la diagonal AC por los puntos B y D, y trazando perpendiculares a la diagonal AC por los puntos A y C:



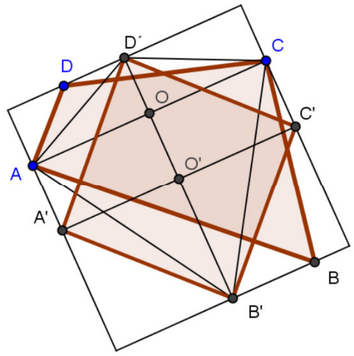
Este rectángulo tiene el doble del área del cuadrilátero, lo que puede verse fácilmente si descomponemos el rectángulo en cuatro rectángulos como muestra la figura:



Los puntos medios de los lados de este rectángulo son los vértices de un rombo cuya área es la mitad de la del rectángulo y por lo tanto la misma que el cuadrilátero dado.

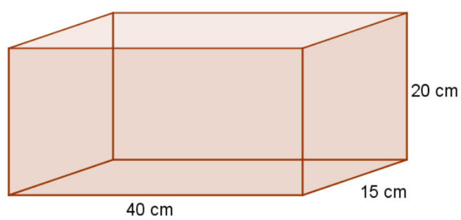


Otra manera: Por un hecho conocido: Los triángulos que se obtienen al desplazar un vértice de un triángulo paralelamente al lado opuesto, tienen todos ellos la misma área (problema 11 de las Notas de Geometría 1). Si trazamos por D una recta paralela a AC, y por el punto medio O de AC una perpendicular a AC, sea D' la intersección de ambas rectas. Los triángulos ADC y AD'C tienen igual área. Por lo mismo, si B' es el punto en la intersección entre la recta paralela a AC por el vértice B y la perpendicular a ella por O

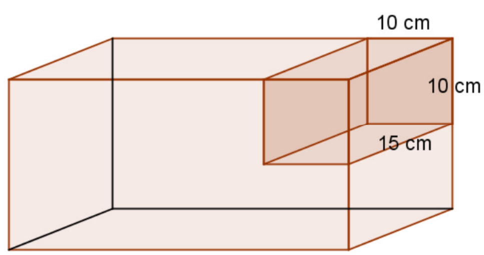


los triángulos ABC y AB’C tienen igual área, de modo que el cuadrilátero AB’CD’ tiene igual área que el dado ABCD. Para transformarlo en un rombo de igual área basta tomar el punto medio O’ del segmento D’B’ y repetir lo anterior trazando la perpendicular por O’ a B’D’. Se obtiene así el rombo A’B’C’D’

Problema 3- En un cubo de 10 cm de arista entra un litro de agua. ¿Cuántos litros de agua entran en una caja cuyas caras son rectángulos, y las aristas miden 15 cm, 40 cm y 20 cm?



Solución: Podemos descomponer la caja en 8 cajas de 15cm por 10cm por 10cm



Cada una de estas cajas, equivale a un cubo y medio de arista 10 cm, o sea, entra un litro y medio de agua en cada una de estas cajas. De manera que en la caja dada entran 8×1,5 =12 litros.

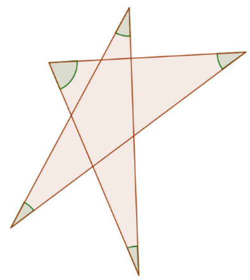
Nota: Quien esté familiarizado con volúmenes, puede resolver el problema de una manera más directa pues el volumen del cubo es $1000cm^3$ y el de la caja dada $12000cm^3$.

TORNEO DE LAS CUENCAS

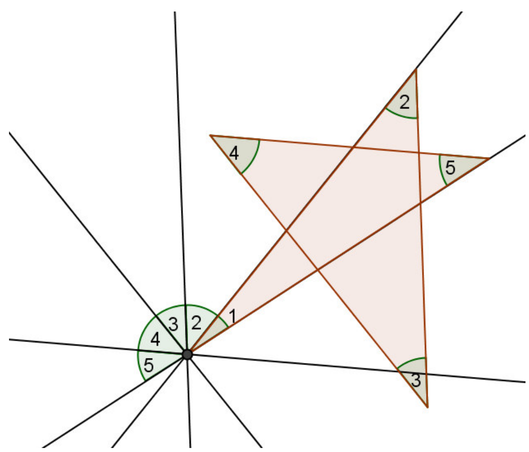
2013 Primera Ronda Soluciones

TERCER NIVEL

Problema 1- Hallar la suma de los ángulos marcados en los vértices de la estrella.

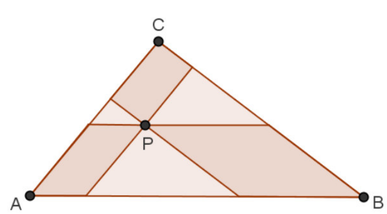


Solución: Trazando paralelas a los sucesivos lados de la estrella por uno de sus vértices, como lo ilustra la figura:



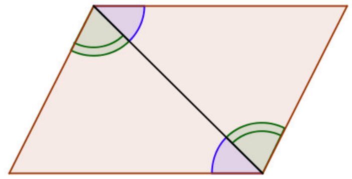
se observa que la suma de los ángulos es igual a 180º.

Problema 2- Dado un triángulo ABC y un punto P en su interior, al trazar paralelas por P a los lados del triángulo se forman tres paralelogramos. Indicar dónde ubicar P para que dos de estos paralelogramos sean rombos.

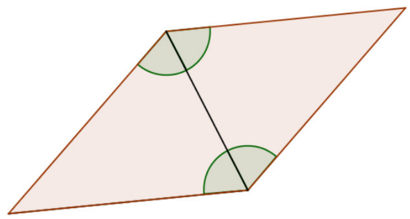


Solución: Es oportuno notar que las diagonales de un paralelogramo descomponen al mismo

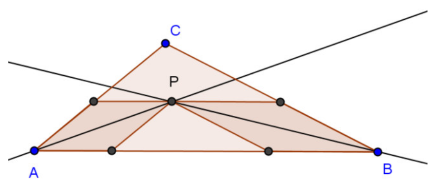
en dos triángulos iguales:



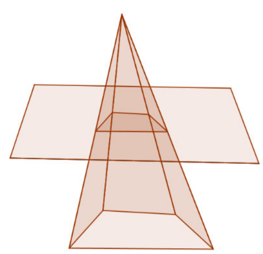
En el caso de un rombo, estos triángulos son isósceles y recíprocamente, un paralelogramo obtenido al unir por sus bases dos triángulos isósceles, es un rombo.



De modo que las diagonales de un rombo son las bisectrices de sus ángulos. Para resolver este problema, bastará tomar el punto P en la intersección de dos bisectrices del triángulo:

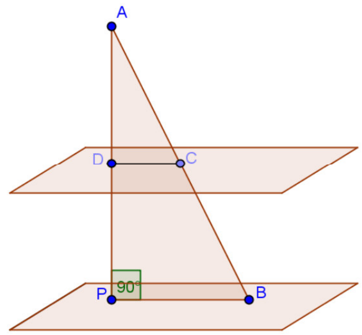


Problema 3- Una pirámide de área lateral 800 cm^2, ilustrada por la figura, se secciona con un plano paralelo a su base a la mitad de su altura, obteniendo dos cuerpos, uno de los cuales es una pirámide. Determinar el área lateral de esta pirámide.

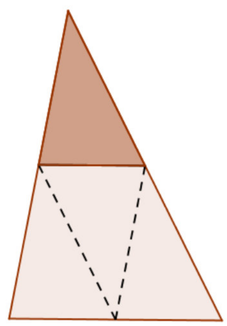


Aclaración: Se llama área lateral a la suma de las áreas de los triángulos que forman las caras laterales de la pirámide.

Solución: El vértice superior A de la pirámide, un vértice B en la base de la misma y el pié de su altura P, forman un triángulo rectángulo:



Los segmentos PB y CD son paralelos por estar en las intersecciones de un plano con dos planos paralelos. Como D es el punto medio del segmento AP, por el teorema de Thales, debe ser C el punto medio de AB. Se concluye que el plano que secciona a la pirámide, secciona a sus caras laterales en sus respectivas bases medias, es decir en cada cara lateral se tiene sólo la cuarta parte de del área de la cara:



El área buscada será entonces la cuarta parte el área lateral de la pirámide, o sea 200 cm^2.