Investigación y Docencia

por Néstor Aguilera

El seno y los satélites

Introducción

A fines de abril de 2001 la estación espacial rusa MIR terminaba su vuelo, y existiendo la posibilidad de que cayera sobre zonas pobladas, durante los últimos días los científicos en los centros espaciales de distintos países observaron con atención la caída, mientras que diarios y noticieros televisivos cubrían la noticia.

En una foto difundida en esa época y reproducida en la Figura 1, podemos ver en un centro espacial ruso a científicos e invitados observando con atención la pantalla donde se registra la trayectoria de la MIR. La pantalla muestra un mapa de la Tierra, y observando con cuidado (o ampliando la imagen si se está usando la computadora) podemos ver también sobre el mapa unas curvas similares al gráfico del seno.

En otra imagen difundida en esa época, reproducida en la Figura 2, podemos apreciar con mayor detalle la trayectoria prevista para la reentrada de la MIR y en qué forma se parece al gráfico del seno.

En realidad, en el espacio que rodea la Tierra hay miles de satélites puestos por el hombre ya sea para fines científicos, de telecomunicaciones, para estudiar el clima o con fines de espionaje, y es común poder observar a simple vista a alguno de ellos surcando el espacio.

Figura 1: centro espacial ruso en abril de 2001

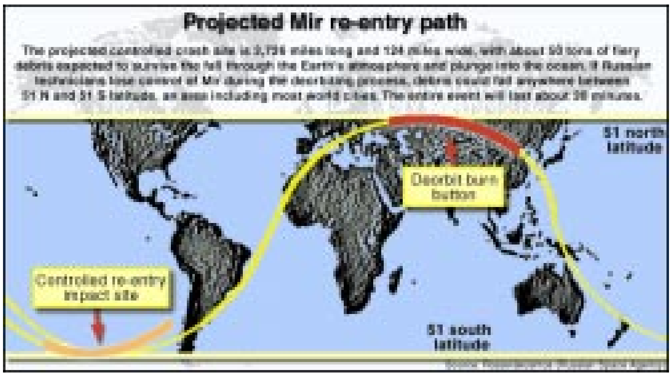


Figura 2: trayectoria final de la MIR

Continuando con nuestro estudio de las aplicaciones elementales de las funciones trigonométricas iniciado en el artículo anterior, *El seno, el ocho y el caracol*, en estas notas estudiaremos por qué la trayectoria de los satélites se representa como una especie de onda sinusoidal. Para hacerlo, desandaremos de alguna forma el camino hecho en el artículo mencionado, donde habíamos "enrollado" el gráfico del seno.

En nuestras exploraciones tomaremos como modelo la Figura 3 producida por la agencia norteamericana NASA (National Aeronautics and Space Administration) en la que se muestran las posiciones y trayectorias de varios satélites con fines meteorológicos de la agencia NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration). También podemos apreciar en esta figura la posición del Sol relativa a la Tierra, y la demarcación entre el día y la noche en el momento de realizar el gráfico (la fecha y hora se pueden ver en la esquina inferior izquierda); la parte sombreada corresponde, claro, a la parte de la Tierra donde es de noche.

Figura 3: trayectoria de algunos satélites de la NOAA

Así, nuestro primer objetivo será estudiar algunas representaciones posibles de la superficie de la Tierra en un mapa, a continuación veremos cómo se representan en los mapas circunferencias en tres dimensiones que tienen el mismo centro que la Tierra, como las geodésicas y la delimitación día-noche, luego usaremos las leyes de Newton para establecer algunos hechos básicos del movimiento de los satélites y terminaremos estudiando la órbita de los satélites para poder representar sus trayectorias.

A fin de mantener una presentación elemental, nuestros modelos serán sencillos, y por lo tanto no muy precisos. Por ejemplo, supondremos que la Tierra es una esfera aunque sabemos que no es cierto, ya que el radio en el ecuador es de unos 6378,1 km y el radio "polar" es de unos 6356,8 km, en tanto que el radio promedio, teniendo en cuenta su volumen, es de unos 6371,0 km.

De cualquier forma, el nivel matemático de estas notas es similar a la del artículo *El seno, el ocho y el caracol*, aunque ligeramente más elevado pues haremos uso más intensivo de expresiones analíticas para representar superficies sencillas como planos o esferas en tres dimensiones, y veremos con más detalle problemas de movimientos. Como en ese artículo, usaremos indistintamente grados, radianes o reales para expresar ángulos.

Por cierto que estas notas serán más provechosas si se dispone de un software para realizar los cálculos y gráficos correspondientes (aquí usamos, como es costumbre, Mathematica), pero su utilización no es necesaria y no nos involucraremos en detalles específicos de implementación (desde ya, estoy a disposición del lector para cualquier consulta al respecto).

1. Mapas de la Tierra

Representar la superficie de una esfera, o parte de ella, en el plano significa disponer de una función que lleve puntos de la esfera en el plano. Estas representaciones siempre están acompañadas de deformaciones, y se trata de elegir las que tengan características más deseables según el uso que se les dará. Aunque tienen el nombre genérico de "proyecciones", en general no son las proyeccciones *lineales* a las que estamos acostumbrados, y no siempre se hacen directamente al plano sino que muchas veces se hacen primeramente sobre superficies que se pueden desarrollar en el plano, como un cilindro o un cono. De esta forma, tenemos una primera clasificación de las proyecciones en planas, cilíndricas o cónicas según sea la superficie en la que se hace la primera proyección. También las más de las veces hay una homotecia o una traslación de por medio, para representar sobre una hoja de papel objetos muy grandes o muy pequeños, como en el caso de la Tierra o un átomo[1].

No es nuestro propósito aquí dar una descripción de las muchas proyecciones que se usan—nuestro interés está en las proyecciones cilíndricas—pero sí debemos mencionar una proyección plana muy común que es la *ortográfica* que es como si viéramos la Tierra desde un punto lejano, como en la Figura 4, y es la que se usa normalmente al representar objetos tres dimensionales en el papel.

La proyección ortogonal *es* una proyección lineal, que al punto (x, y, z) del espacio le asigna la proyección ortogonal (de ahí el nombre de "ortográfica") sobre un plano de ecuación $a\,x + b\,y + c\,z = 0$. No es importante que el plano pase por el origen, pero esta suposición simplifica las cuentas.

Para hacer esta proyección sobre el plano (u, v), suponemos que tenemos

[1] pero no insistiremos sobre este tema al hacer la descripción de las proyecciones.

Figura 4: la Tierra vista desde “lejos”

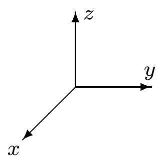
una base ortonormal $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$[2] tal que (a, b, c) es un múltiplo (no nulo) de $\mathbf{w}$. Después de encontrar la expresión de (x, y, z) en esa base,

$$(x, y, z) = u\,\mathbf{u} + v\,\mathbf{v} + w\,\mathbf{w},$$

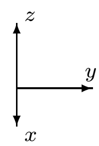
la proyección se define como la aplicación $(x, y, z) \to (u, v)$ (del espacio en el plano).

Desde ya que la proyección resultante dependerá de las elecciones de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, por ejemplo si intercambiamos el orden (los nombres) de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, pero no depende de $\mathbf{w}$ en el sentido de que $\mathbf{w}$ puede estar a uno u otro lado del plano pero obtenemos el mismo resultado (mientras mantengamos los mismos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$).

Es usual dibujar los tres ejes en el plano como



pero esta representación no corresponde a una proyección ortogonal: si los ejes y y z están representados a 90°, el eje x debería dibujarse sobre el mismo eje z, en la parte superior o inferior, como por ejemplo



Otra proyección plana a la que estamos acostumbrados es la fotográfica, en la que el vértice desde el cual se hace la proyección no está en el “infinito” y las ecuaciones son un poco más complicadas.

Pero pasemos a las proyecciones cilíndricas. Siempre considerando a nuestro espacio como dotado de coordenadas (x, y, z), la más sencilla es considerar la esfera de radio R con centro en el origen de coordenadas O, y un cilindro de eje coincidente con el eje z y radio r como esquematizamos en la Figura 5, donde vemos que al punto P sobre la esfera se le asigna el punto P' sobre el cilindro. No es importante que $r < R$ o que $R < r$, pues siempre mediante contracciones o dilataciones (que ya hacemos dicho que haremos sin mayores explicitaciones) podemos llegar al caso $r = R = 1$.

[2]Escribimos en **negrita** letras que indican vectores.

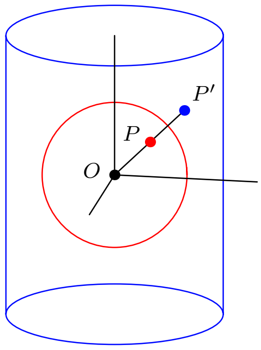


Figura 5: esquema de la proyección cilíndrica

Si el punto sobre la esfera se escribe como

$$x = R\,\cos(\varphi)\,\cos(\psi), \quad y = R\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\cos(\psi), \quad z = R\,\mathrm{sen}(\psi), \tag{1.1}$$

donde pensamos a φ como la longitud y ψ como la latitud, la proyección sobre el cilindro es

$$x' = r\,\cos(\varphi), \quad y' = r\,\mathrm{sen}(\varphi), \quad z' = r\,\tan(\psi),$$

o en otras palabras,

$$(x', y', z') = \frac{r}{R\,\cos(\psi)}\,(x, y, z). \tag{1.2}$$

Otra forma de poner esta ecuación sin hacer mención explícita de los ángulos es

$$(x', y', z') = \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,(x, y, z), \tag{1.2$'$}$$

de modo que (x', y', z') es un múltiplo positivo de (x, y, z) con $x'^2 + y'^2 = r^2$, es decir (x', y', z') está sobre el cilindro.

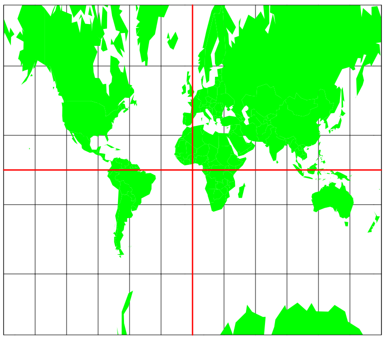
Esta proyección está definida en realidad para cualquier punto del espacio que no esté sobre el eje del cilindro. En particular no está definida para el centro de la esfera ni para los "polos", lo que se ve claramente en la ecuación (1.2$'$).

Una vez obtenida la proyección sobre el cilindro, se lo corta a lo largo de una recta paralela a su eje y se lo despliega en un plano. Como queremos que sea un "mapa", en general restringimos la altura del cilindro, por ejemplo limitando las latitudes que van a ser representadas.

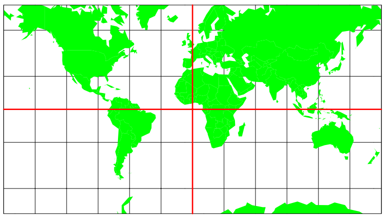
El resultado es que el punto (x, y, z) descrito como en (1.1) se proyecta en el punto sobre el plano de coordenadas $r\,(\varphi, \tan(\psi))$. Prescindiendo de r y R, podemos escribir la proyección cilíndrica de la esfera al plano como

$$(\varphi, \psi) \to (u, v) = (\varphi, \tan(\psi)). \tag{1.3}$$

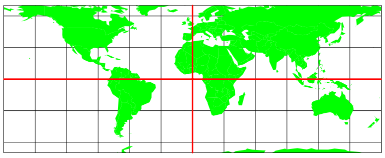
En la Figura 6 *a*), mostramos el resultado de aplicar este procedimiento a la Tierra entre las latitudes entre $-70°$ (sur) y $70°$ (norte), suponiendo como es usual que el sistema de coordenadas (x, y, z) se ha elegido de tal manera que el eje de giro de la Tierra coincide con el eje z, y el Polo Norte está ubicado sobre el semi-eje z positivo. El cilindro en este caso se ha cortado en la recta de $-180°$, de modo que el meridiano de Greenwich y el ecuador quedan en el centro de la imagen (marcados en rojo en la figura), procedimiento que realizaremos siempre en este artículo.



a) sin correcciones



b) de Mercator



c) equiangular

Figura 6: proyecciones cilíndricas

Como se puede observar, la distorsión es excesiva. Por esta razón, no es común usarla directamente, sino que se agrega otra transformación en el plano para "achicar" las latitudes grandes, como en la proyección de Mercator, que mostramos en la Figura 6 b).

La proyección de Mercator ha sido usada mayormente por los navegantes marinos por ser "conforme" (preserva ángulos): si se traza una segmento desde un punto hasta otro en este tipo de mapa, siguiendo el rumbo indicado por la inclinación del segmento se puede "navegar" del primero al segundo punto. Sin embargo, en general este segmento no es parte de la geodésica, el arco de circunferencia que describe la distancia más corta entre dos puntos sobre la esfera, por lo que los navegantes aéreos usan otro tipo de proyección (donde las geodésicas de la esfera se representan mediante segmentos rectos del plano). De cualquier forma, la proyección de Mercator es aún muy usada, y es la que se utiliza en la Figura 3.

Su descripción matemática no es sencilla, e involucra el logaritmo (tomamos $r = R = 1$):

$$(\varphi, \psi) \to \big(\varphi, \log\big(\tan(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4})\big)\big). \tag{1.4}$$

El inventor de esta proyección fue Gerhard Kremer (1512–1594), cuyo nombre "latinizado" era Gerhardus Mercator, y de ahí el nombre de la proyección.

Es curioso cómo Mercator pudo hacer la descripción de esta proyección en 1569, a pesar de que la función logaritmo fue introducida por Neper unos cuantos años más tarde en 1614, y que para justificar la conformalidad se necesita cálculo introducido por Leibniz (1646–1716) y Newton (1643–1727).

En fin, desde cierto punto de vista la más sencilla de todas las proyecciones cilíndricas es la *equiangular* que mostramos en la Figura 6 c), donde el punto (x, y, z) descrito en la ecuación (1.1) tiene como imagen el punto en el plano de coordenadas (φ, ψ) (suponiendo $r = R = 1$), es decir,

$$(\varphi, \psi) \to (\varphi, \psi), \tag{1.5}$$

y como consecuencia los paralelos están equiespaciados. Esta proyección permite una rápida lectura de la ubicación de puntos en la esfera mediante coordenadas de longitud y latitud, aunque no preserva áreas ni ángulos.

Obviamente, "la acción" está sobre el tratamiento de las latitudes. En la Figura 7 comparamos las que hemos considerado:

- para la proyección equiangular (en azul en la figura): $\psi \to \psi$,
- para la de Mercator (en verde en la figura): $\psi \to \log\big(\tan(\psi/2 + \pi/4)\big)$,
- para la proyección cilíndrica (en rojo en la figura): $\psi \to \tan(\psi)$.

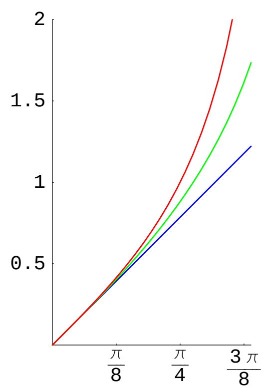


Figura 7: comparación de las transformaciones para las latitudes

Como puede observarse, las curvas son similares para ángulos chicos, pero las deformaciones son mayores cuando se aumentan los ángulos.

Ejercicio 1.1: Ver que si $0 < \psi < 90°$ entonces

$$\psi < \log\big(\tan(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4})\big) < \tan(\psi).$$

2. Ecuaciones de una circunferencia

Nuestro próximo paso es ver cómo se representa en una proyección cilíndrica una circunferencia cuyo centro coincide con el de la Tierra. Estas circunferencias, o partes de ellas, pueden aparecer por distintos motivos. Por ejemplo, en la descripción de la órbita de un satélite, pero también en la geodésica que une dos puntos sobre la Tierra, o como parte de la división "día-noche" producida por el Sol que aparece en la Figura 3.

En cualquier caso, nos interesa encontrar la intersección del plano que contiene a la circunferencia con el cilindro sobre el cual haremos la proyección, como se representa en la Figura 8, en la que la circunferencia está en color púrpura y su proyección sobre el cilindro en color verde. Claro que en el caso de una geodésica o la división día-noche, la circunferencia estará simplemente sobre la esfera.

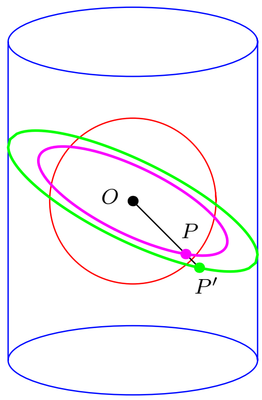


Figura 8: intersección del plano de la órbita con el cilindro

En la figura también hemos marcado un punto P sobre la circunferencia y su proyección P' sobre el cilindro. Debemos observar que mientras la curva púrpura y la verde parecen ser similares, la primera es una circunferencia (porque suponemos que la órbita es circular o porque es un gran círculo sobre la esfera), mientras que la segunda es siempre una elipse que será una circunferencia sólo si yace en un plano perpendicular al eje del cilindro.

Como podemos esperar después de los experimentos realizados en el artículo *El seno, el ocho y el caracol*, al desarrollar el cilindro de la Figura 8 nos quedará el gráfico del seno, tal vez dilatado o contraído o desplazado hacia uno u otro lado, *¡pero nunca desplazado hacia arriba o hacia abajo!*

Vayamos despacio, y primero tratemos de encontrar ecuaciones paramétricas para la circunferencia, considerando, como ya hemos hecho, que las coordenadas (x, y, z) son tales que el eje del cilindro es el eje z, el centro de la Tierra (o esfera) es el origen de coordenadas, y que el Polo Norte está en el semi-eje z positivo. Suponemos además que el radio del cilindro es r, el de la esfera es R, y el de la circunferencia es ρ, aunque ya sabemos que siempre podemos reducirnos al caso $r = R = \rho = 1$ (mediante homotecias).

El plano con el que vamos a intersecar el cilindro pasa por el centro de la esfera, de modo que queda completamente determinado por una normal[3], digamos (a, b, c), y podemos escribir una ecuación implícita del plano como

$$a\,x + b\,y + c\,z = 0.$$

Uno de los casos más sencillos es cuando $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ y entonces el plano contiene al ecuador. En este caso la circunferencia puede describirse mediante la ecuación paramétrica

$$x = \rho\,\cos(\theta), \quad y = \rho\,\operatorname{sen}(\theta), \quad z = 0,$$

donde θ varía entre 0 y 2π.

El caso general puede obtenerse mediante rotaciones a partir del anterior. Por ejemplo, podemos hacer primeramente una rotación en α dejando el eje x fijo y luego en β dejando ahora el eje z fijo, como ilustramos en la Figura 9. En *a*) mostramos una circunferencia (en azul) en el plano $z = 0$ y segmentos que señalan las direcciones x, y, z. En *b*) mostramos el efecto de una rotación dejando el eje x fijo, señalando con un arco el ángulo α de rotación; la nueva circunferencia y normal están marcadas en verde. En *c*) mostramos el efecto de rotar en β dejando el eje z fijo, marcando en rojo la nueva circunferencia y normal. Finalmente en *d*) comparamos la configuración inicial con la final, señalando tres puntos A, B, C sobre los ejes coordenados y sus imágenes A', B', C' después de las dos rotaciones.

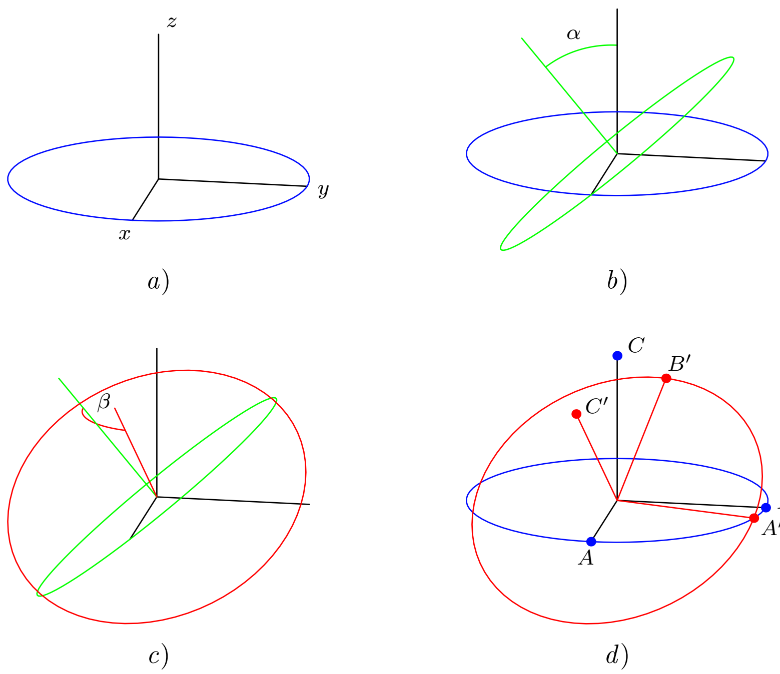


Figura 9: *a*) configuración original, *b*) rotación alrededor del eje x, *c*) rotación alrededor del eje z, *d*) comparando las configuraciones original y final.

[3]un vector normal a un plano es un vector perpendicular al plano y de longitud 1.

En general, las rotaciones en 3 dimensiones necesitan de tres parámetros. Por ejemplo, todavía podríamos considerar una rotación alrededor de la normal obtenida en el último paso. Sin embargo, como la circunferencia permanece invariante por esta rotación, en nuestro caso no es necesario hacerla.

Para describir estas rotaciones analíticamente, es conveniente recurrir a las matrices[4]. Así, una rotación en α alrededor del eje x como la descrita se obtiene multiplicando por la matriz

$$m' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix},$$

mientras que una rotación alrededor del eje z como la descrita se obtiene multiplicando por la matriz

$$m'' = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\beta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El efecto de las sucesivas rotaciones puede expresarse mediante la matriz producto

$$m = m'' \times m' = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) & \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

De modo que al rotar una circunferencia de ecuación

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\operatorname{sen}(\theta), \quad z = 0,$$

en α y luego en β (como hemos descrito), obtenemos una circunferencia de ecuación

$$\begin{aligned} x &= \rho\,(\cos(\beta)\cos(\theta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\theta)), \\ y &= \rho\,(\operatorname{sen}(\beta)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\cos(\beta)\operatorname{sen}(\theta)), \\ z &= \rho\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\theta), \end{aligned} \tag{2.1}$$

contenida en el plano de normal

$$\big(\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta), -\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta), \cos(\alpha)\big). \tag{2.2}$$

Puesto de otra forma, como siempre podemos encontrar α y β de modo de expresar la normal al plano inicial en la forma de la ecuación (2.2), la circunferencia contenida en el plano con centro en el origen y de radio ρ puede ser descrita en forma paramétrica mediante las ecuaciones (2.1) donde el parámetro θ varía entre 0 y 2π.

Problema 2.1: En realidad un plano tiene dos normales. Si una de ellas se expresa como en la ecuación (2.2), encontrar ángulos α' y β' (en términos de α y β) para expresar la otra normal en forma similar. ✂

[4] El lector no debe reproducir las “cuentas” que siguen (aunque no estaría demás), sino sólo observar los resultados.

Problema 2.2: A partir del gráfico de la Figura 9 y teniendo en cuenta que hay dos normales para cada plano, parece que podemos restringirnos a pedir $0 \le \alpha \le \pi/2$. ¿Es siempre posible encontrar α' y β' de modo que $0 \le \alpha' \le \pi/2$ y se obtenga la misma circunferencia rotada?.
Sugerencia: Si la ecuación de la circunferencia rotada es $f(t, \alpha, \beta)$, considerar combinaciones como $-f(t, -\alpha, \beta + \pi)$ o $-f(-t, -\alpha + \pi, \beta + \pi)$. ✂

3. Proyectando una circunferencia concéntrica

Tomando como referencia la Figura 10, nuestro propósito es ahora encontrar ecuaciones para la proyección de una circunferencia como descrita en la sección anterior.

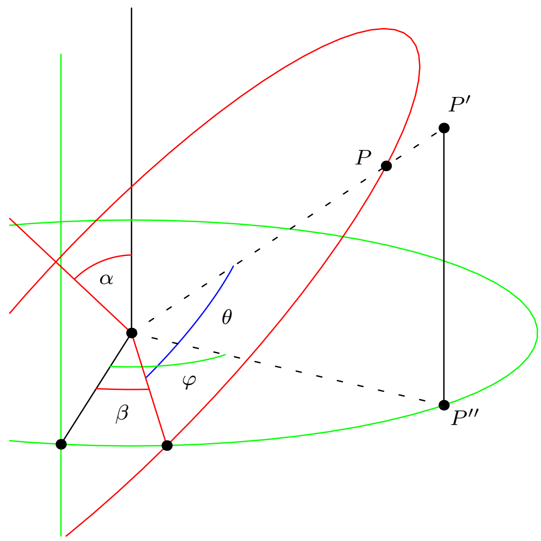


Figura 10: proyección de un punto de la circunferencia sobre el cilindro

En la figura hemos tomado para simplificar $r = R = \rho = 1$ y señalado la circunferencia en rojo, marcando los ángulos de rotación α y β. En verde están señalados el ecuador y la proyección sobre el cilindro del meridiano de Greenwich (es decir la recta $x = 1$, $y = 0$), que darán origen a los ejes de coordenadas en la proyección plana.

Hemos tomado un punto $P = (x, y, z)$ sobre la circunferencia y su proyección $P' = (x', y', z')$ sobre el cilindro, remarcando en verde la longitud φ correspondiente (tomada como positiva hacia el este). También hemos señalado el punto $P'' = (x', y', 0)$, que es la proyección del punto P' sobre el ecuador.

Como el punto $P = (x, y, z)$ está sobre la circunferencia, hay un ángulo θ, remarcado en azul en la Figura 10, de modo que se satisfacen las ecuaciones (2.1), pero nuestro interés ahora es expresar z', es decir la longitud del segmento (orientado) $P'P''$, en términos de la longitud φ, a fin de poder representar la proyección de la circunferencia como el gráfico de una función en el plano (u, v) de la proyección, y reproducir algunos de los resultados del artículo *El seno, el ocho y el caracol*.

Usando la ecuación (1.2′) y poniendo $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, obtenemos

$$(x', y', z') = \frac{r}{d}\,(x, y, z), \tag{3.1}$$

y usando la longitud φ, podemos poner

$$x' = r\,\cos(\varphi) \qquad \text{y} \qquad y' = r\,\operatorname{sen}(\varphi). \tag{3.2}$$

Nuestro "gráfico del seno" debería estar dado en términos de φ, pero observando la Figura 10, vemos que no debemos esperar un múltiplo de $\operatorname{sen}(\varphi)$ sino un múltiplo de $\operatorname{sen}(\varphi - \beta)$. Volviendo a mirar la Figura 10 y a la altura máxima que alcanzan z o z', vemos que el múltiplo debe ser $r\,\tan(\alpha)$ y entonces debemos comprobar si

$$z' = r\,\tan(\alpha)\,\operatorname{sen}(\varphi - \beta). \tag{3.3}$$

Problema 3.1: Comprobar que efectivamente se cumple la ecuación (3.3).
Sugerencia: Desarrollar $\operatorname{sen}(\varphi - \beta)$ y usar las expresiones en las ecuaciones (3.1) y (3.2). ✂

De este modo vemos que cualquier punto en la curva proyectada estará en el gráfico del seno (corrido y dilatado), pero nos faltaría ver que obtenemos *toda* la curva, es decir, nos falta ver que a medida que θ varía entre 0 y 2π, también φ toma cualquier valor entre 0 y 2π. Esto parece claro a partir de la Figura 10, siempre que $0 \le \alpha < \pi/2$, pero dejamos al lector que lo verifique formalmente.

Resumiendo, una circunferencia con centro en el origen, de radio ρ y con normal dada por la ecuación (2.2), satisface las ecuaciones (2.1). Al intersecar el plano que la contiene con el cilindro de radio r obtenemos las ecuaciones (3.1), que podemos reescribir como las ecuaciones (3.2) (para x' y y') y (3.3) (para z').

El próximo paso es "abrir" el cilindro de acuerdo a las transformaciones que hemos visto en la Sección 1.

Si no hay "correcciones" (Ecuación (1.3)) las ecuaciones correspondientes, digamos en el plano (u, v), son

$$u = \varphi = \arctan(x, y) \quad \text{y} \quad v = z'/r = \tan(\alpha)\,\operatorname{sen}(\varphi - \beta), \tag{3.4}$$

donde con $\arctan(x, y)$ indicamos el arco tangente de y/x, teniendo en cuenta el cuadrante en que se encuentra el punto (x, y) (esta forma de la función "arctan" está disponible en la mayoría de los lenguajes de programación, y evita las singularidades cuando $x = 0$). Hemos puesto $v = z'/r$ para hacer que u y v sean adimensionales (esto es, no tengan una unidad de medida asociada), pero debemos entender que el factor $1/r$ sólo realiza una contracción o dilatación en el eje v.

Para la proyección equiangular (Ecuación (1.5)) tenemos

$$\begin{aligned} u &= \varphi = \arctan(x, y), \\ v &= \operatorname{arcsen}(z'/r) = \operatorname{arcsen}\big(\tan(\alpha)\operatorname{sen}(\varphi - \beta)\big), \end{aligned} \tag{3.5}$$

y finalmente, para la proyección de Mercator, según las ecuaciones anteriores y las (1.4), tenemos

$$u = \varphi \qquad \text{y} \qquad v = \log\big(\tan(\frac{w}{2} + \frac{\pi}{4})\big), \tag{3.6a}$$

donde

$$w = \operatorname{arcsen}(z'/r) = \operatorname{arcsen}\big(\tan(\alpha)\operatorname{sen}(\varphi - \beta)\big). \tag{3.6b}$$

Es posible reducir un poco las ecuaciones para v y w, pero no obtenemos esencialmente nada nuevo:

Problema 3.2: Ver que en las ecuaciones (3.6) se puede poner

$$v = \operatorname{arctanh}(z'/r),$$

donde arctanh es la función inversa de la tangente hiperbólica,

$$\tanh(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}}.$$

✂

Teniendo en cuenta la ecuación (3.3), debemos observar que cuando $\alpha = 45°$ y $\beta = 0°$, estamos en el caso considerado en el artículo *El seno, el ocho y el caracol* (para la proyección sin correcciones), donde obtenemos exactamente que la proyección es el seno. En las proyección de Mercator, el seno se ve deformado y “aplastado”, siendo mayor aún la deformación en la proyección equiangular (ver Figura 6).

Por otro lado si $\alpha = 90°$ hay problemas en cualquier caso, que no son sorpresa porque corresponden al caso en que el plano contiene al eje z y la proyección, que no está definida sobre los polos, consiste de dos rectas verticales.

Hemos desarrollado las ecuaciones a partir de la circunferencia contenida en el plano, pero las “cuentas” pueden simplificarse mucho si sólo queremos obtener las ecuaciones de la intersección de un plano que contiene al origen con el cilindro, y dejamos esta inquietud al lector interesado.

Pero es hora de aplicar nuestras ecuaciones. En la Figura 11 vemos una proyección equiangular entre los 80° sur y 80° norte de latitud, en la que hemos graficado distintas geodésicas que pasan por la ciudad de Buenos Aires, ubicada a 34,6° de latitud sur y −58,4° de longitud oeste. Las geodésicas deben corresponder a $|\alpha| \geq 34{,}6°$ (considerando α como en las ecuaciones (2.1) y $-90° < \alpha \leq 90°$). En la figura hemos remarcado en rojo la geodésica “límite”, mientras en azul están las correspondientes a ±40°, ±60° y ±80°. Observamos que estas geodésicas son deformaciones del gráfico del seno, pero *siempre* el ecuador se mantiene como “eje x” y las latitudes máximas y mínimas son, como era de esperar, $\pm\alpha$ en cada caso. También podemos observar que si bien Ciudad del Cabo y Buenos Aires están aproximadamente a la misma latitud, la ruta más corta no es siguiendo el paralelo[5], mientras que la “ruta polar” que realizan los aviones para ir de Buenos Aires a Nueva Zelanda no debe estar muy lejos de la geodésica de $\alpha = 60°$, o sea que no es muy “polar”. Esa misma geodésica hacia el otro lado pasa por España, cerca de Madrid. No está de más observar que el punto opuesto a Buenos Aires (la antípoda) está en algún lugar del Mar Amarillo, Shangai es bastante aproximadamente la antípoda de Paraná (Entre Ríos).

Problema 3.3: Suponiendo que la Tierra es una esfera de radio 6.370 km, calcular la distancia entre Buenos Aires y Madrid (ubicada a 40,4° de latitud norte y 3,7° de longitud oeste).

[5]recordar lo dicho en la pág. 6 sobre el uso de la proyección de Mercator por los marinos.

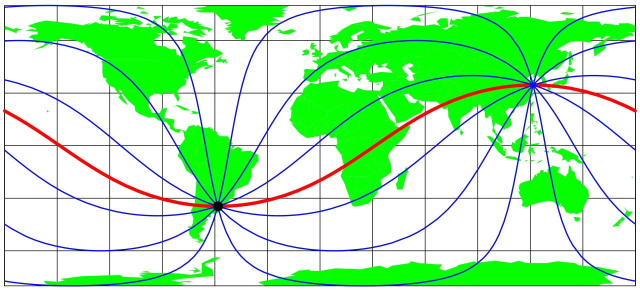


Figura 11: geodésicas por Buenos Aires (proyección equiangular)

Respuesta: Unos 10.045 km. ✄

Problema 3.4: En la Figura 3, la posición del Sol es aproximadamente 162,5° oeste y 23,5° norte.

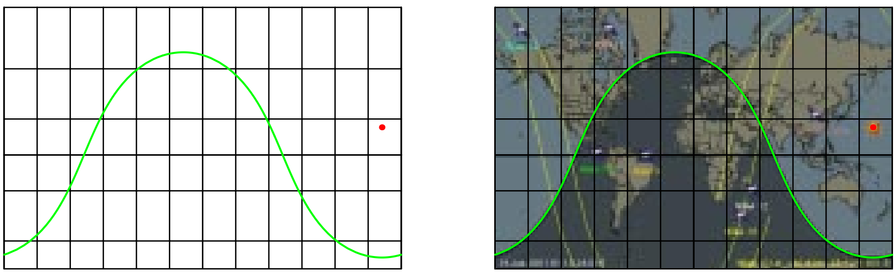
a) encontrar la (una) ecuación de la circunferencia que determina la separación día-noche.

b) encontrar la (una) ecuación de la proyección de Mercator de esta circunferencia.

Respuesta: Una normal al plano es aproximadamente $(-0{,}87, 0{,}28, 0{,}4)$, y entonces la ecuación de la curva en el plano (u, v) es (aproximadamente):

$$u(t) = \arctan(-0{,}30\ \cos(t) + 0{,}38\ \mathrm{sen}(t), -0{,}95\ \cos(t) - 0{,}12\ \mathrm{sen}(t)),$$
$$v(t) = \mathrm{arctanh}(0{,}92\ \mathrm{sen}(t)).$$

En la Figura 12 vemos en *a*) la curva obtenida en verde señalando la posición del Sol en rojo y en *b*) superpuesta con la Figura 3, donde podemos apreciar que la aproximación es bastante buena. ✄



a) *b*)

Figura 12: obteniendo la separación entre día y noche

4. Movimiento de un satélite: leyes de Newton y Kepler

En una primera aproximación podemos considerar que el movimiento de los satélites se rige por las leyes de Newton de movimiento, entre las cuales está (si las unidades de medida son adecuadas)

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}, \tag{4.1}$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza que actúa sobre el cuerpo de masa m que tiene aceleración $\mathbf{a}$; y la de gravitación, por la cual dos cuerpos de masas respectivamente m y m' cuyos centros de gravedad están a una distancia d, se atraen el uno al otro ejerciéndose en cada cuerpo una fuerza de magnitud

$$K\,m\,m'/d^2, \tag{4.2}$$

donde K es una constante "universal".

Si consideramos el sistema de dos cuerpos, no habiendo otras fuerzas actuantes, obtenemos de las dos ecuaciones anteriores que el movimiento del cuerpo de masa m sufre una aceleración $\mathbf{a}$ en dirección hacia el otro cuerpo de magnitud

$$|\mathbf{a}| = K\,m'/d^2. \tag{4.3}$$

En general el movimiento no es tan sencillo. Por ejemplo, muchos de los planetas del sistema solar fueron descubiertos antes de ser observados directamente debido a los errores en los cálculos de las órbitas cuando no eran considerados.

Nosotros estamos tomando modelos simples de satélites alrededor de la Tierra, y ya hemos dicho que suponemos a la Tierra perfectamente redonda. Supondremos además que su centro de gravedad está en el centro de la esfera y no cambia por las mareas u otros fenómenos, y nuestro sistema consistirá únicamente de la Tierra y el satélite que no son influenciados por otras fuerzas.

En fin, aunque en general las órbitas de los satélites que nos interesan son elípticas, supondremos que el movimiento del satélite es una circunferencia alrededor de la Tierra, como ilustramos en la Figura 13, y que recorre la circunferencia a una velocidad angular constante.

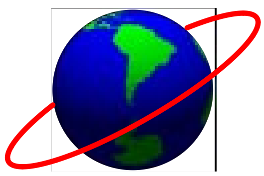


Figura 13: órbita de un satélite alrededor de la Tierra

Como debemos relacionar el movimiento y la aceleración, es preciso tener alguna descripción adecuada de ellos. Siempre podemos adoptar un sistema de coordenadas con centro en el centro de la Tierra de modo que el satélite a tiempo t esté en la posición $\mathbf{p}(t)$ dada por

$$\mathbf{p}(t) = d\,(\cos(\omega t), \operatorname{sen}(\omega t), 0),$$

donde ω es la velocidad angular que suponemos constante y d es la distancia al centro (de la Tierra y de la circunferencia) que también suponemos constante.

En este caso la aceleración (que se obtiene tomando dos derivadas en la ecuación anterior, pero que en todo caso consideramos como axioma) viene dada por

$$\mathbf{a} = -\omega^2\,\mathbf{p}(t),$$

es decir tiene dirección hacia el centro de la circunferencia, y por eso a veces se la llama aceleración centrípeta.

Tomando la magnitud de $\mathbf{a}$ obtenemos

$$|\mathbf{a}| = d\,\omega^2,$$

por lo que reemplazando en la ecuación (4.3), y llamando M a la masa de la tierra, obtenemos

$$\boxed{K\,M = d^3\,\omega^2.} \tag{4.4}$$

La última ecuación es sumamente importante y por eso la hemos recuadrado. Se trata de la tercera ley que Kepler (1571–1630) enunció para el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

Nos dice que, suponiendo una órbita circular de velocidad uniforme, la magnitud de ω *es independiente de la masa del satélite* y la velocidad angular y la distancia están relacionadas "inversamente": a mayor distancia menor velocidad angular (en valor absoluto), y conociendo una podemos determinar la otra. Así, dos objetos, aún de distinta masa, que recorren una misma órbita conservan la misma distancia entre sí y nunca se "chocan".

Estamos suponiendo una órbita circular y que la velocidad angular es constante, pero esta última suposición es redundante:

Problema 4.1 (*requiere derivadas*): Ver que si el movimiento circular se describe por

$$\mathbf{p}(t) = d\,\big(\cos(\alpha(t)), \operatorname{sen}(\alpha(t)), 0\big),$$

entonces $\alpha(t)$ es una función lineal de t.
Sugerencia: obtener $\mathbf{a}(t)$ derivando dos veces $\mathbf{p}(t)$ y usar las ecuaciones (4.1) y (4.2). ✂

Como ilustración de la ecuación (4.4), usémosla para determinar aproximadamente el período de la Luna. Dado que el período T es el tiempo en que tarda en completarse una vuelta a la circunferencia,

$$T = 2\pi/|\omega|,$$

tomando

$$\begin{aligned} R &= \text{radio de la Tierra} \approx 6.400\,\text{km}, \\ g &= \text{aceleración de la gravedad} = KM/R^2 \approx 9{,}8\,\text{km/seg}^2, \\ d &\approx 384.000\,\text{km}, \\ |\omega| &= \sqrt{g}\,R/d^{3/2}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

obtenemos que la Luna tarda en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra en aproximadamente

$$T \approx 27{,}3 \text{ días},$$

lo cual no está tan mal: el valor "real" (tomando modelos más sofisticados y mediciones más precisas) es 27,3217.

5. Satélites geoestacionarios

Por supuesto que nuestro análisis es muy crudo: suponemos que el centro de la Tierra está fijo, no hemos tenido en cuenta que la Tierra no es una esfera, ni que el centro de gravedad cambia también debido a las mareas, ni la oscilación alrededor del eje, etc. Pero para la descripción de la trayectoria de un satélite tal como se ve desde la Tierra, nos falta un dato importante: que la Tierra gira.

Para darnos cuenta de la importancia de la rotación de la Tierra, antes que estudiar el caso general vale la pena considerar primero el caso particular e interesante constituido por los satélites *geoestacionarios*, es decir, que permanecen "fijos" respecto de la Tierra.

En la Figura 14 mostramos la imagen de la Tierra desde dos de estos satélites de la agencia norteamericana NOAA. La imagen izquierda está tomada por un satélite que permanece sobre el ecuador a 135° de longitud oeste, mientras que la imagen de la derecha está tomada por un satélite que permanece sobre el ecuador a 75° de longitud oeste.

Figura 14: vista de la Tierra desde dos satélites geoestacionarios de la NOAA

Naturalmente que un satélite no puede quedarse "fijo" pues la atracción de la Tierra lo haría caer (y en la ecuación (4.4) no puede ser $\omega = 0$). El término geoestacionario se refiere a que si trazamos una recta desde el centro de la Tierra al satélite, la intersección de esta recta con la superficie de la Tierra (que está rotando) es siempre la misma.

Para pensar: *Como la circunferencia trazada por la trayectoria de este tipo de satélites tiene como centro el centro de la Tierra, el plano de la circunferencia contiene al ecuador.* ✂

Aunque estamos suponiendo que las órbitas de los satélites son circunferencias (en vez de, por ejemplo, elipses), se puede demostrar que en el caso de los satélites estacionarios la trayectoria *es* una circunferencia.

Por lo tanto, para un satélite geoestacionario el valor absoluto de la velocidad angular ω debe ser la misma velocidad angular que la Tierra: 360° por día, o equivalentemente, el período es de 1 día exactamente.

Usando la ecuación (4.4) y los datos en (4.5), vemos que un satélite geoestacionario debe tener una órbita a una distancia de

$$42{,}340\,\text{km del centro de la Tierra,}$$

o sea a unos 35,940 km de la superficie (la altura "real" para el satélite de la izquierda de la Figura 14 es 35,786 km sobre la superficie de la Tierra).

Por supuesto que representar la trayectoria de un satélite geoestacionario sobre un mapa de la Tierra es muy aburrido: es un punto sobre el ecuador. Pero la ecuación (4.4) nos dice también que si la órbita de un satélite está a una altura mayor que la de los satélites geoestacionarios, la velocidad angular es menor (y por lo tanto el período es mayor), como el caso de la Luna, mientras que si la altura es menor, su velocidad angular es mayor.

Problema 5.1: ¿Qué pasa si en el análisis anterior cambiamos *velocidad angular* por *velocidad*? Dicho de otra forma, ¿podemos comparar (la magnitud de) la velocidad de un satélite respecto de un satélite geoestacionario sabiendo que su distancia al centro de la Tierra es mayor o menor? ✂

Es oportuno observar que los satélites que nos interesan vuelan a una altura de 150 km o más, donde la atmósfera no tiene mucha influencia, y es interesante tener como referencia que los aviones de pasajeros vuelan como máximo a unos 10 km de altura.

6. Trazando la trayectoria de un satélite

Para estudiar el caso general, tomemos otro ejemplo de un satélite de la NOAA, el NOAA 10, cuya trayectoria vemos en la Figura 3 (pág. 2) junto con las de otros satélites de la NOAA, y tratemos ahora de representar su trayectoria como en esa figura.

Observando con cuidado, podemos apreciar que en la parte inferior de la figura está indicada a la izquierda la fecha y a la derecha la posición del NOAA 10: 46,4° de latitud sur, 43,1° de longitud este, y 831,8 km de altura.

Usando nuestros "datos" en (4.5), obtenemos

$$|\omega| \approx 89{,}0/\text{día},$$

o en horas,

$$|\omega| \approx 3{,}70874/\text{hora}, \tag{6.1}$$

es decir que ¡da una vuelta al mundo en menos de 2 horas!

Para ser más precisos, el período es

$$T \approx 1{,}69 \text{ horas}. \tag{6.2}$$

Según los datos de la NASA, el NOAA 10 describe una trayectoria elíptica de excentricidad 0,002557, y un período de 101,5 minutos muy próximo al calculado pues la elipse es casi una circunferencia.

Nuestro próximo paso es modificar las ecuaciones de la circunferencia (2.1) para tener en cuenta la velocidad angular, obteniendo

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho\,(\cos(\beta)\,\cos(\omega t) - \cos(\alpha)\,\operatorname{sen}(\beta)\,\operatorname{sen}(\omega t)),\\ y(t) &= \rho\,(\operatorname{sen}(\beta)\,\cos(\omega t) + \cos(\alpha)\,\cos(\beta)\,\operatorname{sen}(\omega t)),\\ z(t) &= \rho\,\operatorname{sen}(\alpha)\,\operatorname{sen}(\omega t), \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde ahora t indica el tiempo, que por conveniencia en este ejemplo (siendo que el período es del orden de 1 hora) lo indicaremos en horas.

Claro que de la ecuación (4.4) no podemos saber si el satélite va en dirección oeste o este, en realidad hasta podría ir en una órbita "por los polos", todo lo que sabemos es el valor absoluto de la velocidad angular. Para determinar la circunferencia sobre la que hablamos en la Secciónes 2 y 3 necesitamos algún dato más, como por ejemplo el rumbo que lleva en algún momento, a fin de determinar α, β y el signo de ω.

Sin embargo podemos ver en la Figura 9 que α tiene un significado preciso: indica la latitudes máxima y mínima que alcanza la órbita, y determina el ángulo con que el plano de la circunferencia corta al plano del ecuador.

Para ilustrar el problema que nos preocupa, mostramos en la Figura 15 trayectorias posibles considerando que el satélite, que tiene velocidad angular como la del NOAA 10 (dada en (6.1)), pasa por el punto $(0, 0)$ correspondiente a la intersección del ecuador con el meridiano de Greenwich en $t = 0$ (es decir $\beta = 0$), y tiene una inclinación de $\alpha = 80°$ (similar al caso que consideramos). Usamos una proyección equiangular para simplificar, y considerando como posiciones iniciales y finales (remarcadas con puntos "gruesos") las correspondenties a $\pm T/2$, donde T está dado por la ecuación (6.2).

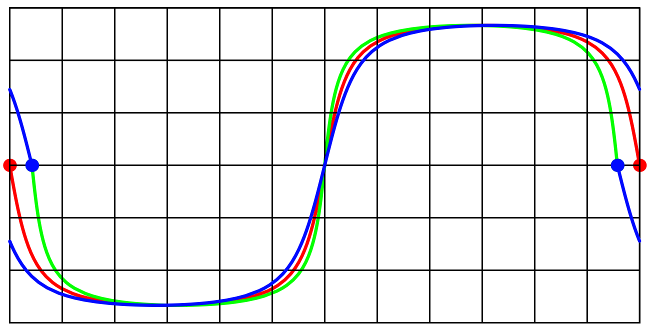


Figura 15: la traza de la trayectoria depende de si el satélite va hacia el este o hacia el oeste

En la figura vemos en rojo la órbita de referencia correspondiente a que la Tierra no rote, en cuyo caso la traza de la trayectoria es la misma ya sea que el satélite vaya hacia el este o hacia el oeste, y cruza el ecuador a 80°. En verde vemos la trayectoria suponiendo que el satélite se mueve hacia el este, mientras que en azul está trazada la trayectoria suponiendo que el satélite se mueve hacia el oeste. Como la Tierra va girando hacia el este, si el satélite también se mueve hacia el este su velocidad relativa a un punto fijo sobre la Tierra que rota es menor, mientras que si el satélite se mueve hacia el oeste su velocidad relativa es mayor. Correspondientemente, los ángulos no son exactamente 80° (un poco más o un poco menos, respectivamente) al cruzar el ecuador.

En otras palabras, si la trayectoria respecto de la Tierra supuesta sin movimiento se describe en la proyección sobre el plano (u, v) como

$$(u(t), v(t)),$$

donde t está expresado, digamos, en horas, el movimiento teniendo en cuenta la rotación de la Tierra se describe por

$$\left(u(t) - \frac{360°}{24}\, t, v(t)\right).$$

Es un buen momento para que el lector que haya leído el artículo *El seno, el ocho y el caracol*, recuerde el análisis hecho con la guarda a partir del "8", donde mencionábamos que alguien nos estaba corriendo el papel a medida que dibujábamos el "8", puesto que se trata del mismo fenómeno: ahora alguien nos está corriendo el papel hacia la derecha.

Para pensar: *¿Cómo se relaciona este análisis con "La vuelta al mundo en 80 días", en la que J. Verne sostiene que sus personajes principales tardaron en realidad 79 días para dar la vuelta?* ✂

En fin, volviendo a nuestras trayectorias de satélites, no sólo tenemos que tener en cuenta que el satélite se mueva hacia el este o hacia el oeste, sino también la inclinación en algún momento dado, por ejemplo al cruzar el ecuador. Así, ilustramos en la Figura 16 distintas posibilidades de un satélite moviéndose hacia el oeste: en verde una órbita con una inclinación de $\alpha = 30°$, en azul una de $\alpha = 60°$, y en rojo una órbita con una inclinación de $\alpha = 89°$ ("casi" 90°), manteniendo otros datos como antes.

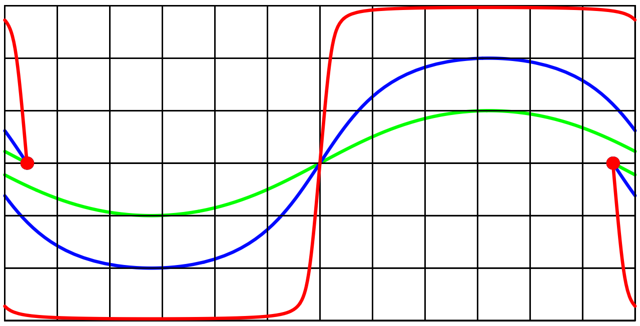


Figura 16: trayectorias correspondientes a distintas inclinaciones

Como se puede observar, a pesar de que las distancias recorridas son las mismas, en el sentido que las velocidades angulares son iguales y en los tres casos se mueven hacia el oeste, debido en parte a la deformación de la proyección parecería que a mayor ángulo se recorre mayor distancia. También podemos observar que las órbitas de 30° y 60° alcanzan máximos y mínimos en las latitudes correspondientes al ángulo de inclinación (en la de 89° de inclinación no se puede apreciar tanto), pero dejamos que el lector demuestre algunas de estas propiedades, prestando atención especial al caso $\alpha = 90°$:

Problema 6.1: Supongamos que un satélite tiene una órbita circular de período T, y que $\beta = 0$ y $|\alpha| < \pi/2$. Ver que:

a) En $T/4$ y $3T/4$ alcanza la máxima o mínima latitud (coordenada y), mientras que en $T/2$ cruza nuevamente el ecuador.

b) Cualquiera sea su rumbo, mientras siempre vaya hacia el este o el oeste, alcanza la misma longitud (coordenada x) en $T/4$, $T/2$, $3T/4$ y T (ver Figura 16). En particular, a partir del inciso anterior, tiene la misma latitud y longitud (independientemente del rumbo) en $T/2$ (y T). ✂

Problema 6.2: Esquematizar un gráfico similar al de la Figura 15, suponiendo un período igual al NOAA 10 (ecuación (6.2)) pero una órbita "entre los polos", y por lo tanto no va ni hacia el este ni hacia el oeste. ¿A qué ángulos cruza el ecuador? ¿Es posible encontrar una órbita donde se cruce el ecuador a 90°? ✂

Volviendo a la trayectoria del NOAA 10 representada en la Figura 3, queremos representar la trayectoria en una proyección de Mercator, por lo que de acuerdo a las ecuaciones (3.6), o mejor las obtenidas en el Problema 3.2, y las ecuaciones (6.3), tenemos (haciendo $r = R = \rho$)

$$\begin{aligned} u(t) &= \arctan\big(\cos(\beta)\,\cos(\omega t) - \cos(\alpha)\,\operatorname{sen}(\beta)\,\operatorname{sen}(\omega t), \\ &\qquad \operatorname{sen}(\beta)\,\cos(\omega t) + \cos(\alpha)\,\cos(\beta)\,\operatorname{sen}(\omega t)\big) - \pi\, t/12, \\ v(t) &= \operatorname{arctanh}(\operatorname{sen}(\alpha)\,\operatorname{sen}(\omega t)), \end{aligned} \tag{6.4}$$

y nuestro problema es encontrar α, β y el signo de ω (si el satélite va hacia el este o hacia el oeste).

Claro que de acuerdo a las ecuaciones anteriores, el satélite debe cruzar el ecuador cuando $t = 0$. Como podemos fijar el origen del tiempo, una elección sencilla es considerar como tiempo inicial el momento que cruza el ecuador al este de África, aproximadamente a 55,5 grados[6]. Como mencionábamos, esto determina $\beta \approx 55{,}5° \approx 0{,}968658$.

Ahora nos queda determinar α y t_0 de modo que en el tiempo t_0 el satélite esté en la posición indicada en la Figura 3,

$$\begin{aligned} u(t_0) = u_0 &= 43{,}1° \text{ de longitud este} = 0{,}752237, \\ v(t_0) = v_0 &= 46{,}4° \text{ de latitud sur} = -0{,}916362, \end{aligned}$$

donde los valores a la derecha indican las posiciones en la proyección de Mercator (el valor de u_0 es la longitud en radianes, pero el de v_0 *no* es la latitud en radianes).

Nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que no es sencillo de resolver, por lo que apelamos a una resolución numérica (con un software adecuado) basada en el método de Newton-Raphson[7]. Este método necesita de valores iniciales razonablemente próximos, y nuestra elección como valor inicial para t_0 depende de si el satélite va hacia el este o hacia el oeste, siendo negativo en el primer caso y positivo en el segundo (según la Figura 3). Teniendo en cuenta que un período es aproximadamente 1,69 horas (ecuación (6.2)), y que $|t_0|$ es algo menor que la cuarta parte, intentamos con $t_0 = \pm 0{,}2$.

Por otra parte, podemos determinar el valor inicial de α teniendo en cuenta que ya sea que vaya hacia el este o el oeste, está próximo a la pendiente en el punto al cruzar el ecuador, que "a ojo" es aproximadamente 77° (no es muy importante la precisión acá), como mostramos en la Figura 17 donde la aproximación de la tangente está marcada en verde.

Nos falta relacionar el signo de ω y la dirección (si este o oeste). El signo a elegir depende de la normal al plano elegida, pues (ver Figura 9 y la explicación correspondiente) la circunferencia que consideramos en las ecuaciones (2.1) va en el sentido contrario a las agujas del reloj cuando vista "desde la normal". En nuestro caso, y por la elección de α y β que estamos haciendo, ω debe ser positivo cuando el satélite va hacia el este y negativo cuando va hacia el oeste.

Considerando separadamente los casos, recordando el valor de $|\omega|$ de la ecuación (6.1), obtenemos

[6] mi vista no es tan buena, hubo un poco de prueba y error para obtener algo aceptable.

[7] no es importante conocer cómo funciona.

Figura 17: la inclinación en el ecuador es aproximadamente 77°

Viajando hacia el este:

$\omega = 3{,}70874$.

Valores iniciales: $t_0 = -0{,}2$, $\alpha = 77°$.

Valores obtenidos: $t_0 = -0{,}227923$, $\alpha = 1{,}31681 = 75{,}4478$ grados.

Viajando hacia el oeste:

$\omega = -3{,}70874$.

Valores iniciales: $t_0 = 0{,}2$, $\alpha = 77°$.

Valores obtenidos: $t_0 = -0{,}221555$, $\alpha = 1{,}42168 = 81{,}4564$ grados.

Al comparar los valores obtenidos, lo primero que salta a la vista es que los valores (absolutos) de t_0 son prácticamente iguales, pero los valores de α son bastante diferentes, lo cual de alguna manera ya sabemos: recordando la Figura 15, sabemos que el valor de la inclinación en el ecuador, que hemos establecido en 77°, es *menor* que α si el satélite va hacia el oeste (unos 81°), pero *mayor* si va hacia el este (unos 75°).

Nos falta decidir con cuál nos quedamos, si la trayectoria hacia el este o hacia el oeste. Como la única indicación que tenemos es la trayectoria trazada en la Figura 3, debemos comparar las trayectorias que obtuvimos.

En las Figuras 18 y 19 mostramos las trayectorias que obtuvimos superpuestas sobre la figura original. En estas figuras las trayectorias están indicadas con trazos verde para indicar la trayectoria *pasada* y azul para indicar la trayectoria *futura*, señalando en rojo el punto de la posición actual.

Por supuesto, concluimos que el satélite va hacia el oeste, sin dejar de sorprendernos por la precisión lograda a pesar de que muchos de los datos fueron tomados "a ojo" y de las simplificaciones que hemos hecho sobre el modelo.

Podemos ir a dormir tranquilos.

7. Comentarios sobre referencias

Como en el artículo compañero a éste, *El seno, el ocho y el caracol*, las únicas referencias consultadas han sido las de internet.

Los diarios y agencias noticieras tienen abundantes datos sobre la MIR y periódicamente dan noticias sobre satélites mostrando imágenes similares a las

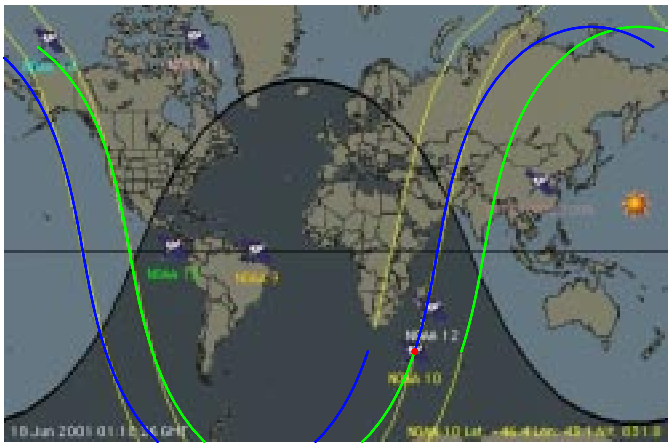


Figura 18: trayectoria calculada si el satélite va hacia el este

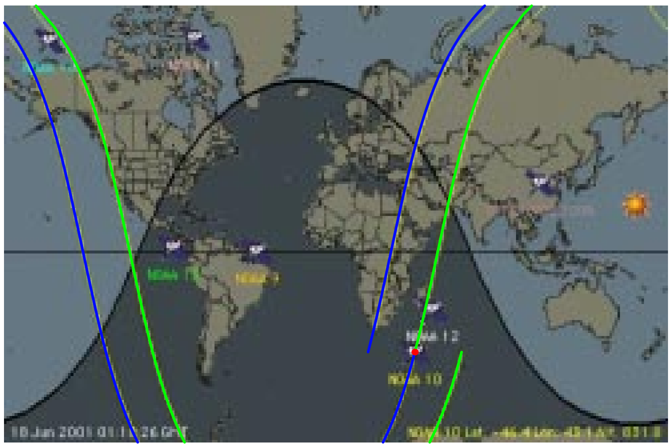


Figura 19: trayectoria calculada si el satélite va hacia el oeste

que estudiamos. Por ejemplo, la Figura 1 ha sido tomada del diario El País (`http://www.elpais.es/`), y la Figura 2 de la CNN (`http://www.cnn.com/`).

La NASA (`http://www.nasa.gov/`) tiene mucho material disponible (en inglés), y especialmente actividades escolares para niveles primario y secundario. Tiene una sección dedicada a mostrar "en tiempo real" la posición de los satélites de la NASA, la NOAA, otras agencias y otros países, de la cual hemos obtenido la Figura 3 (`http://liftoff.msfc.nasa.gov/realtime/jtrack/noaa.html`). También de la NASA hemos tomado la Figura 14.

La NOAA también se preocupa por la educación y dedica la sección en `http://www.education.noaa.gov/` al tema.

La Figura 4 y parte de la Figura 13 han sido obtenidas con el software "XEarth", que permite ver cómo varía la posición de la Tierra, la sombra producida por el Sol, y realizar trayectorias de satélites (con ciertas restricciones) y puede usarse como fondo de pantalla. El software original fue realizado para Unix por K. Johnson, la versión utilizada acá es la de Macintosh por J. Lindvall.

Muchos datos históricos pueden encontrarse en la página de la Universidad de San Andrés de Escocia (`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk:80/`), mientras que enciclopedias como la Columbia Encyclopedia combinan la presentación histórica con la científica (`http://www.bartleby.com/`).

El desarrollo de las leyes de Kepler y luego las de Newton, enmarcadas dentro de la época que se llamó la "Revolución Científica", es una de las páginas más fascinantes de la historia de la ciencia, donde aparecen todo el genio, la grandeza y también las debilidades humanas. Una buena síntesis de este período puede leerse en `http://www.thehistorynet.com/NationalHistoryDay/teach99/` (en inglés).