

N. Aguilera

¡Qué rápido ruedan las ruedas...!

Seminario Nacional OMA
10 al 14 de noviembre de 2014

Estas notas forman parte de la colección de apuntes en la sección *Investigación y Docencia* de la Olimpiada Matemática Argentina, disponibles vía internet en <http://oma.org.ar/invydoc>.

Fecha de esta versión: 18 de abril de 2020

Contenidos

1. Introducción	1
Notaciones, convenciones, garabatos,...	2
2. Cuesta abajo en mi rodada	3
2.1. El gatito y la escalera	3
2.2. La cardioide	4
2.3. Epicicloides e hipocicloides	8
2.4. La cicloide y las trocoides	11
2.5. El teorema de los dos círculos	13
2.6. Comentarios para esta parte	16
3. ¿Cómo era eso?	18
3.1. La derivada	18
3.2. La integral	23
3.3. Relación entre la derivada y la integral	25
3.4. Comentarios para esta parte	26
4. El cálculo de variaciones	27
4.1. Dos ejemplos	27
4.2. La técnica	32
4.3. Encontrando el camino más corto	36
4.4. La braquistocrona	37
4.5. Comentarios para esta parte	42

1. Introducción

Estos son los apuntes de un curso de geometría de 18 hs destinado a docentes de nivel medio y alumnos de profesorado y licenciaturas de matemáticas.

Ante la cantidad de información disponible en internet, y aún en las mismas publicaciones de la OMA, fue difícil decidir qué contenidos abarcar, por lo que tuve en cuenta las siguientes ideas:

- La geometría euclidiana elemental tiene muchos resultados interesantes, bonitos y divertidos, pero pocos de ellos son de uso cotidiano, y menos aún son los que sobresalen nítidamente, como el teorema de Pitágoras.
- Para avanzar más hay que usar herramientas del análisis (o cálculo) matemático como la derivada y la integral.
- En muchas escuelas, y por distintos motivos, son pocos los contenidos de geometría que se abarcan. Posiblemente sea peor el caso del cálculo.
- En los últimos años el *software* libre de geometría dinámica ha avanzado a pasos agigantados, abarcando no sólo los objetivos iniciales sino que actualmente incluyen herramientas de cálculo, álgebra, álgebra simbólica, e incluso programación.

Digno de mención es [GeoGebra](#), gratuitamente disponible para las plataformas más comunes.

- Varios programas nacionales y provinciales se han preocupado en difundir «netbooks» o similares, a fin de que los alumnos puedan acceder a las nuevas tecnologías. Sin embargo, no parecen haber sido acompañados por planes de capacitación docente acordes.
- En general, los alumnos entienden mejor y se interesan más por los temas que se trabajan con la computadora.

En fin, siendo admirador del libro de [Vasíliev y Gutenmájer \(1980\)](#), para este curso he pensado en incluir algunos contenidos que vimos

hace ya muchos años, cuando trabajábamos con las primeras versiones de Cabri Géomètre, agregándoles el uso de las derivadas e integrales, y una introducción elemental al cálculo de variaciones.

De modo que el curso se divide en dos partes. En la primera seguimos el ya mencionado libro de [Vasíliev y Gutenmájer](#) en la descripción de ruedas que giran, ya sea dentro o fuera de otras ruedas, o sobre una recta. En la segunda parte repasamos un poco las nociones de derivada e integral para finalmente abordar propiedades —desarrolladas entre los siglos XVII y XVIII— de esos movimientos.

Aprovecharemos para familiarizarnos con el uso de GeoGebra para tareas muy distintas, empleándolo en la mayoría de las actividades.

Recordar que siempre se debe tratar de demostrar matemáticamente lo que se ve gráficamente.

Notaciones, convenciones, garabatos,...

- Los enunciados de teoremas (lemas, etc.) están en letras cursivas, así como los de algunos problemas que se desarrollan en el texto.
- Otros problemas, enunciados en letra normal, son para que los resuelva el lector y terminan con el símbolo ✂.
- En letras más pequeñas ponemos algunas notas y comentarios (que comienzan con ↪) y sugerencias (indicadas con 🍷).
- Teoremas y problemas siguen la misma numeración, distinta de la de ecuaciones (éstas encerradas entre paréntesis) y figuras y cuadros.
- Los puntos del plano se indican con mayúscula.
- AB puede indicar un segmento, su longitud, una semirrecta (de origen A en ese caso), o una recta. Si parece que puede no quedar claro por el contexto, trataremos de explicitar de qué se trata.
- Pongo *inscripto* y *descripto*, siguiendo la costumbre argentina (y no la española).

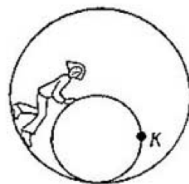
2. Cuesta abajo en mi rodada

2.1. El gatito y la escalera

2.1. Problema. Una escalera situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo. ¿Por qué curva se mueve un gatito sentado en el centro de la escalera? ✂



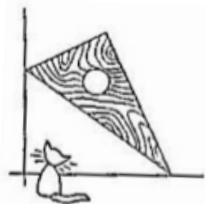
2.2. Problema (Teorema de Copérnico). Por el interior de una circunferencia inmóvil rueda, tocándola sin deslizar, otra circunferencia cuyo radio es dos veces menor que el de la primera. ¿Qué curva describirá el punto K sobre la circunferencia rodante? ✂



2.3. Problema. ¿Qué relación hay entre los problemas 2.1 y 2.2?

🐾 Considerar el diámetro KK' de la circunferencia móvil y su centro. ✂

2.4. Problema. Una escuadra de madera se traslada por el plano de forma que los vértices de sus ángulos agudos se mueven por los lados de un ángulo recto. ¿Cómo se moverá el vértice del ángulo recto de la escuadra?



🐾 Recordar el teorema que relaciona el ángulo central con el inscrito. ✂

Nos preguntamos ahora cuál será la curva que recorre el gatito del [Problema 2.1](#) si no está sentado en el centro de la escalera.

Para hacerlo nos orientamos con la [Figura 2.1](#), donde suponemos que:

- el piso es el eje x positivo y la pared el eje y positivo,
- la escalera es el segmento AB , y,
- el gatito se encuentra en la posición G , siendo $a = BG$ y $b = AG$ las distancias (que permanecen fijas) del gatito a los extremos de la escalera.

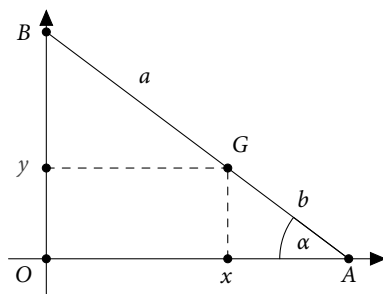


Figura 2.1: Esquema del gatito en la escalera para el [Problema 2.5](#).

2.5. Problema. Con la descripción anterior:

- Hacer el gráfico con GeoGebra, obteniendo el lugar geométrico que describe G (usando el comando correspondiente).
- Ver que $G = (a \cos \alpha, b \sin \alpha)$.
- Concluir que la curva que describe el gatito es la parte de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que está en el cuadrante positivo.



2.2. La cardioide

2.6. Problema (La paradoja de las monedas). Consideremos dos monedas de igual tamaño, y supongamos que una gira alrededor de la otra (que permanece fija) sin deslizamiento.

Por ejemplo, imaginamos que en la figura la moneda a la izquierda queda fija, mientras la que está a la derecha gira sobre la otra en sentido antihorario.

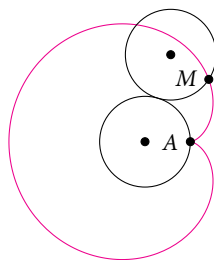


¿Cuántas veces habrá rotado la moneda móvil después de haber completado una vuelta alrededor de la moneda fija?




La *cardioide* es la curva que describe un punto sobre una circunferencia que rueda exteriormente (sin deslizamiento) por otra circunferencia inmóvil de igual radio (como las monedas del problema anterior).

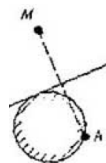
En la figura al costado, el punto M es el que describe la cardioide, y el punto A se llama *cúspide* o *de retroceso* de la cardioide.



El nombre *cardioide* deriva de la similitud con la figura del corazón. Fue usado por primera vez por G. F. M. Salvemini —también conocido como Castillon (1704–1791)— en el artículo *De curva cardioide, de figura sua sic dicta* publicado en 1741 por la *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*.

2.7. Problema. Demostrar que si A es un punto de una circunferencia, el conjunto de puntos simétricos a A respecto a las tangentes a la circunferencia es una cardioide.

Usar este hecho para dibujar una cardioide con GeoGebra. 



En lo que sigue —y salvo indicación contraria— al referirnos a la cardioide supondremos que la circunferencia fija que la define tiene radio r y centro O , la circunferencia móvil tiene centro O' , el punto de retroceso es A que se corresponde con M en la circunferencia móvil, y las circunferencias son tangentes en P .

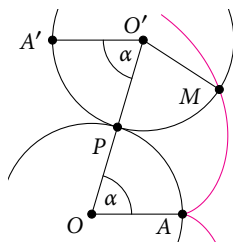
2.8. Problema. Supongamos que $O = (0, 0)$, y d es la longitud del arco \widehat{AP} , es decir $d = r\alpha$, donde α es el ángulo recorrido (en radianes).

Así, para $\alpha = 0$ tenemos $M = P = A = (r, 0)$, y en general,

$$P = r(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

$$O' = 2r(\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Entonces:




a) Si A' es el simétrico de A respecto de P , $\angle A'O'P = \angle AOP = \alpha = \angle PO'M$.



b) $M = O' - r(\cos 2\alpha, \text{sen } 2\alpha)$, es decir, las coordenadas de M son

$$x = 2r \cos \alpha - r \cos 2\alpha,$$

$$y = 2r \text{sen } \alpha - r \text{sen } 2\alpha.$$


c) Hacer el gráfico de la cardioide usando el comando **Curva** de GeoGebra y las ecuaciones paramétricas en **b**. 

2.9. Problema. Si la circunferencia fija tiene centro en $(-r, 0)$, y el punto de retroceso es $A = (0, 0)$, entonces la cardioide puede describirse en coordenadas polares como $\rho = 2r(1 - \cos \theta)$.


 Recordar que las coordenadas cartesianas (x, y) y las polares (ρ, θ) se relacionan mediante $x = \rho \cos \theta, y = \rho \text{sen } \theta$. 

2.10. Problema.


a) Determinar el vértice, foco y eje de la parábola de ecuación $2x = y^2 - 1$.


 El mínimo valor posible de x es $-1/2$, y el punto $(0, 1)$ está en la parábola.


b) Encontrar la ecuación en coordenadas polares de la parábola del apartado anterior.

 Despejar ρ y usar $\text{sen}^2 \theta = (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$.

c) Demostrar que si se realiza una inversión de la cardioide respecto de una circunferencia con centro en el punto cúspide, se obtiene una parábola.

 La cardioide es una curva cerrada que por la inversión se transforma en una curva abierta, debido a que el centro de la circunferencia está en la cardioide.

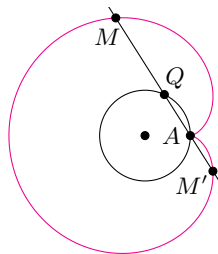
d) Hacer el gráfico de la cardioide en el **Problema 2.9** y hacer la inversión respecto de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio 1 con GeoGebra. ¿Qué diferencias hay si se cambia el radio? 

2.11. Problema. Construir (con regla y compás) O' dados O, A y M . 

2.12. Problema. El conjunto de pies de las perpendiculares trazadas desde un punto A de una circunferencia dada a todas las tangentes posibles a ella es una cardioide. ✂

2.13. Problema. Sea A un punto fijo sobre la circunferencia c de radio r . Para cada recta ℓ que pasa por A , consideramos un punto Q de intersección de ℓ con c ($Q \neq A$), y los puntos M y M' sobre ℓ de modo que $MM' = 4r$ y Q es el punto medio del segmento MM' .

Demostrar que el conjunto de todos los puntos M y M' así obtenidos forma una cardioide (con A exceptuado).



✂ Considerar un paralelogramo $OQMR$, donde O es el centro de la circunferencia. Luego repetir para M' . ✂

2.14. Problema. Si una cardioide está construida sobre una circunferencia de radio r con punto cúspide A , entonces una cuerda M_1M_2 de la cardioide que contenga a A debe medir $4r$.

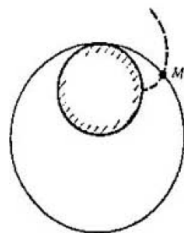
✂ Es una suerte de recíproco del [Problema 2.13](#). ✂

2.15. Problema. Un palo de longitud $2r$ se mueve en el plano de tal modo que su extremo inferior se apoya sobre el fondo de un hoyo semicircular de radio r , y además tiene tangencia con un borde del hoyo. Demostrar que el otro extremo del palo se mueve sobre una cardioide. ✂



2.16. Problema. Por un círculo inmóvil de radio r rueda sin deslizamiento, abarcándolo, un aro de radio $2r$. Demostrar que la trayectoria de un punto del aro es una cardioide.

✂ Comparar con el Teorema de Copérnico (Problema 2.2). ✂



2.3. Epicicloides e hipocicloides

La cardioide se obtiene haciendo rodar un círculo por fuera de otro de igual radio, pero no hay problema en pensar que los radios puedan ser distintos. Las figuras así formadas se llaman *epicicloides*, pues ruedan por «encima» (*epi*) del círculo fijo.

Supongamos de ahora en más que la circunferencia fija tiene centro O y radio r , la móvil tiene centro O' y radio r' , A es un punto de c y M es un punto de c' tales que al comienzo del movimiento A coincide con M , y posteriormente las circunferencias se tocan en P .

Finalmente, llamemos f a la proporción entre los radios:

$$f = \frac{r}{r'}$$

⚠ f no tiene por qué ser entero, y podría ser menor que 1, pero debe ser positivo.

Por ejemplo, cuando $f = 2$ obtenemos la *nefroide*, así llamada por tener similitudes con el riñón.

Como hicimos en el [Problema 2.8](#), llamemos d a la longitud común de los arcos \widehat{PA} y \widehat{PM} , $\alpha = \angle AOP$, $\beta = \angle PO'M$, de modo que

$$d = r\alpha = r'\beta,$$

es decir, $\beta = f\alpha$.

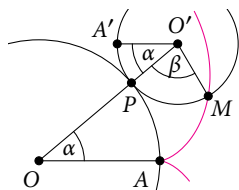
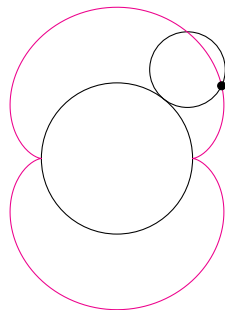
2.17. Problema. Ver que bajo las condiciones anteriores se tiene:

$$O' = (r + r') (\cos \alpha, \sin \alpha),$$

$$M = O' - r' (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)).$$



2.18. Problema. Usando las ecuaciones del [Problema 2.17](#), hacer el gráfico de la epicicloide correspondiente cuando el radio del círculo interior (fijo) es f veces mayor que el del círculo exterior (móvil).

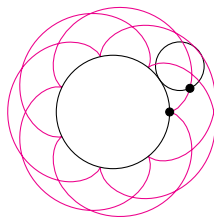


✎ Observaciones para el gráfico con GeoGebra:

- α y β deberían ser números reales (y no ángulos) para no tener complicaciones posteriores.
- Es conveniente poner r' en términos de f y r (en vez de f en términos de r y r'). Recordar que f puede tomar cualquier valor positivo.

✎ A diferencia de lo hecho en el [Problema 2.7](#), no siempre es posible hacer el gráfico sólo con elementos de regla y compás. En particular, cuando f es irracional. ✂

2.19. Problema. Con las notaciones anteriores y recordando el problema de las monedas ([Problema 2.6](#)), supongamos que $f = p/q$ con p y q enteros positivos y coprimos entre sí, y consideremos el movimiento entre dos veces consecutivas para las que M coincide con A . En la figura al costado ilustramos el caso $f = 3/7$.



Demostrar que:

- La cantidad de vueltas que da c' alrededor de c es q (es decir, cuántas vueltas dio O' alrededor de O).
- La cantidad de vueltas que c' da sobre sí misma es $p + q$ (es decir, cuántas veces es $M = O' - (r', 0)$ si $O = (0, 0)$ y $A = (r, 0)$).
- La cantidad de veces que M toca a c es p . ✂

2.20. Problema. Repetir el [Problema 2.18](#) para el caso $f = p/q$ (p y q coprimos), usando ahora un *deslizador* para α entre 0 y $2q\pi$ y luego el *lugar geométrico* con GeoGebra.

✎ $2q\pi$ es el primer valor donde vuelven a encontrarse A y M si el ángulo inicial es 0, según el [Problema 2.19](#). ✂

En vez de rodarla *por fuera*, podríamos hacer rodar una circunferencia *por dentro* de otra, obteniendo una *hipocicloide* (*hipo* = debajo). Claro que en este caso el radio de la circunferencia interior (que se mueve) debe ser estrictamente menor que el de la exterior (fija).

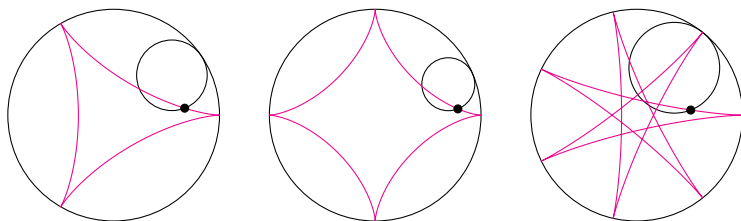


Figura 2.2: Hipocicloides para $f = 3$ (deltoide), $f = 4$ (astroide) y $f = 3/7$.

2.21. Problema. Con notaciones similares a las usadas en el [Problema 2.17](#), ver que si $r' < r$ y $f = r/r'$, tenemos:

$$\alpha = \angle AOP = \angle A'O'P, \quad \beta = \angle PO'M = -f\alpha \text{ (dirigido),}$$

$$O' = (r - r')(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

$$M = O' + r'(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)). \quad \gg$$

2.22. Problema. La *deltoide* o *curva de Steiner* se obtiene cuando el radio de la circunferencia exterior (fija) es el triple del de la interior (móvil). En cambio, cuando el radio de la circunferencia exterior es 4 veces el de la interior obtenemos la *astroide* (ver la [Figura 2.2](#)).

Realizar los gráficos correspondientes con GeoGebra. \gg

2.23. Problema. Repetir los Problemas [2.19](#) y [2.20](#) para el caso de la hipocicloide con $f = p/q$, donde ahora p y q son coprimos con $p > q$, demostrando que los valores respectivos son $q, p - q$ y p . \gg

2.24. Problema. Dado p entero mayor o igual a 3, comparar los gráficos de las hipocicloides correspondientes a $f = p$ y $f = p/(p - 1)$.

a) ¿En qué casos coinciden?, ¿por qué?

b) ¿Y para las epicicloides? \gg

Como ya mencionamos, el factor f no tiene por qué ser entero, aunque debe ser positivo, y en el caso de las hipocicloides, también

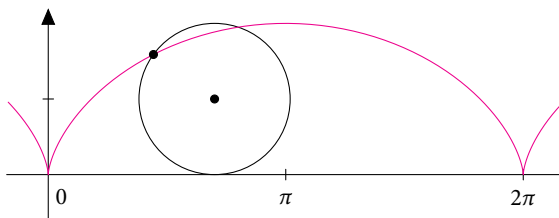


Figura 2.3: Gráfico de la cicloide correspondiente a la circunferencia de radio 1 (y que pasa por $(0, 0)$).

mayor que 1. Si f es racional, la curva toca un número finito de veces a la circunferencia fija (Problemas 2.19 y 2.23), los puntos de intersección están equiespaciados, y la curva tiene longitud finita (sin contar repeticiones). En cambio, si f es irracional el conjunto de puntos en la intersección es *denso*, los puntos nunca se repiten y la curva tiene longitud infinita.

- ✎ La *densidad* se refiere a que cualquier punto en la circunferencia fija se aproxima tanto como se quiere por (infinitos) puntos en la intersección de la epi- o hipocicloide con la circunferencia.

2.4. La cicloide y las trocoides

La *cicloide* es la curva que describe un punto sobre una circunferencia que rueda (sin deslizamiento) sobre una recta. Es una curva de longitud infinita que se repite periódicamente. Cuando el radio de la circunferencia que la define es 1, se apoya sobre el eje x , y pasa por $(0, 0)$, la cicloide toca al eje x en los múltiplos enteros de 2π (Figura 2.3). A veces decimos que la circunferencia y la recta son *directrices*.

Aunque la idea es análoga a las hipo- y epicycloides que vimos, hay esencialmente *una* cicloide, ya que no tenemos una segunda circunferencia y por lo tanto no existe el factor de escala f . Así, como en el caso de la cardioide, todas las cicloides son semejantes entre sí (mediante transformaciones rígidas y eventualmente una homotecia).

Otra diferencia es que no podemos dibujar la cicloide con regla y

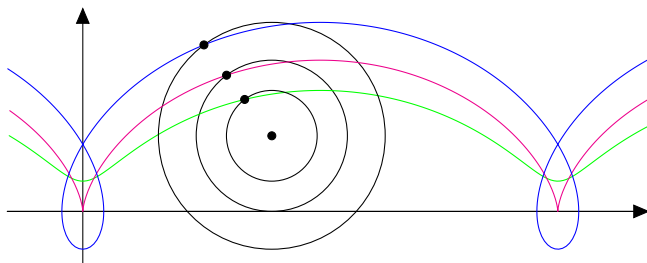



Figura 2.4: Trocoides. La curva en azul corresponde a la trayectoria de un punto a distancia $r' > r$ y la verde a un punto a distancia $r' < r$.

compás debido a la irracionalidad de π , a diferencia de, por ejemplo, la cardioide ([Problema 2.7](#)).



2.25. Problema. Supongamos que una cicloide tiene al eje x como recta directriz, y el radio de la circunferencia directriz es r .

- Si el centro de la circunferencia se ha desplazado una distancia d , entonces ha girado un ángulo $\alpha = d/r$.
- La cicloide puede describirse mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = r(\alpha - \operatorname{sen} \alpha), \quad y = r(1 - \cos \alpha). \quad (2.1)$$

- Hacer el gráfico de la cicloide con GeoGebra (debería obtenerse algo similar a la [Figura 2.3](#)). 

A veces es conveniente estudiar también el movimiento de distintos puntos de una rueda cuando va girando sobre una carretera recta. Por ejemplo, en la rueda de un auto o bicicleta podríamos considerar el movimiento de la válvula por donde se infla, o en la rueda de un tren, un punto sobre el borde exterior que no se apoya sobre la vía. En estos casos la curva descrita es una *trocoides* (ver [Figura 2.4](#)).

-  Es curioso observar que cuando un tren avanza, hay puntos de la rueda que van *hacia atrás* (los del borde exterior).
-  ¡El nombre del curso queda completamente justificado!

2.26. Problema. Describir la trayectoria de un punto ubicado a distancia r' del centro de una circunferencia de centro O y radio r que gira sin deslizarse sobre una recta. Considerando los casos $r' < r$ y $r' > r$:

a) Encontrar ecuaciones paramétricas análogas a las (2.1).

b) Hacer los gráficos similares a los de la [Figura 2.4](#).



2.27. Problema (Paradoja de las ruedas de Aristóteles). Supongamos que tenemos dos ruedas, una dentro de la otra, cuyos bordes son dos circunferencias de radios distintos, y supongamos que ruedan sin deslizamiento dando una vuelta completa.



Las trayectorias que describen las partes inferiores de las ruedas son dos segmentos rectos. Pero los segmentos tienen igual longitud, y por lo tanto las ruedas deben tener el mismo perímetro, contradiciendo la suposición de que las ruedas son distintas.

📖 La paradoja aparece en la obra *Mecánica*, atribuida a Aristóteles (384–322 a. C.).



2.5. El teorema de los dos círculos

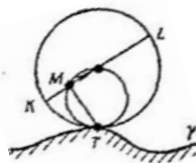
En esta sección estudiamos algunas propiedades de las tangentes a las curvas que hemos visto, basándonos en la siguiente propiedad que para algunos resultará intuitiva:

2.28. Propiedad. Al rodar una circunferencia c sobre una curva γ (en el plano), la velocidad de un punto M sobre c es perpendicular al rayo MT , donde T es la intersección de c con γ (pensar que T actúa como centro de rotación).

No demostraremos esta propiedad en general. En el [Problema 3.2](#) veremos su validez para algunas de las curvas que estudiamos.

Supongamos ahora que sobre una curva γ ruedan dos circunferencias, c_1 y c_2 , de radios r_1 y $r_2 = 2r_1$ y centros O_1 y O_2 , respectivamente. ⁽¹⁾

Designemos por M y K a puntos sobre cada una de ellas que inicialmente coinciden con el punto A de γ , y designemos por T al punto de contacto de las circunferencias con γ . Es decir, los arcos \widehat{TM} y \widehat{TK} tienen la misma longitud, los segmentos O_1T y O_2T son perpendiculares a la tangente a γ por T , y $r_2 = O_2T = 2O_1T = 2r_1$.



Si c_1 rotó un ángulo α_1 (medido en radianes) y c_2 un ángulo α_2 , puesto que los arcos \widehat{TM} y \widehat{TK} tienen igual longitud, debe ser

$$\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2 \quad \text{o} \quad \alpha_2 = \alpha_1 / 2.$$

Por la [Propiedad 2.28](#), la velocidad del punto M (que suponemos no nula) está dirigida perpendicularmente al segmento MT , por lo que hay un diámetro TR de la circunferencia menor tal que $\angle TMR = 90^\circ$. Pero entonces R debe ser O_2 . Así,

$$\alpha_1 = \angle MO_1T = 2\angle MO_2T,$$

de donde se deduce

$$\angle MO_2T = \frac{1}{2} \alpha_1 = \alpha_2.$$

Luego M está en un diámetro de c_2 que contiene a K , digamos KL , y la velocidad de M es un vector sobre ese diámetro.

Como la velocidad de M es tangente a la curva que describe ese punto, hemos demostrado el siguiente teorema, ⁽²⁾ que [Vasíliev y Gutenmájer](#) (p. 156) llaman *teorema de los dos círculos*:

⁽¹⁾ Suponemos γ suave (sin quiebres ni puntas), y podría ser una recta.

⁽²⁾ Suponiendo la [Propiedad 2.28](#) válida.

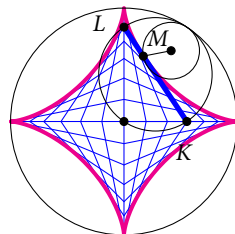
2.29. Teorema (de los dos círculos). Con las notaciones anteriores, el diámetro KL es tangente a la curva que describe el punto M .

En otras palabras, la trayectoria de M es una curva envolvente de la familia de diámetros KL .

▮ La curva γ es envolvente de la familia de curvas c_s , $s \in S$, si cada punto de γ está en una curva c_{s_0} , y en ese punto las tangentes de γ y c_{s_0} coinciden.

Recordando el teorema de Copérnico (Problema 2.2) y la definición de astroide (Problema 2.22), tenemos:

2.30. Problema. Consideremos el diámetro KL de una circunferencia de radio $2r$ que rueda por el interior de otra circunferencia de radio $4r$. Ver que K y L se mueven sobre dos diámetros perpendiculares de la circunferencia mayor, y la envolvente de esta familia de diámetros es una astroide.



2.31. Problema. Consideremos dos circunferencias, una de radio r y otra de radio $2r$ que ruedan conjuntamente sobre una recta determinando dos cicloides, y consideremos el punto M sobre la circunferencia menor y el diámetro KL de la circunferencia mayor, como vimos anteriormente.

Hacer el gráfico correspondiente a la familia de diámetros y la cicloide menor (envolvente), como en la Figura 2.5.

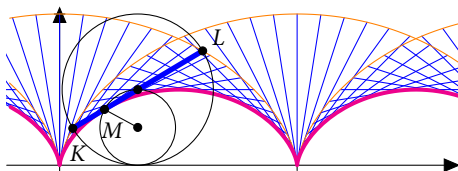


Figura 2.5: El teorema de los dos círculos aplicado a la cicloide.

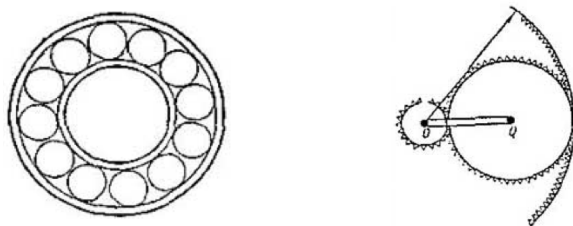


Figura 2.6: Rodamiento y engranaje.

- ⚠ Aunque también delimitan la familia de diámetros, la cicloide más grande y su trasladada (en color naranja) no son envolventes de la familia según la definición, porque en los puntos de contacto no coinciden las tangentes. ✂

2.6. Comentarios para esta parte

- El material de esta sección está tomado fundamentalmente del libro de [Vasiliev y Gutenmájér \(1980\)](#). También buena parte de las ilustraciones (fácilmente reconocibles) son de ese libro.
Los restantes gráficos se hicieron con GeoGebra, salvo la [Figura 2.7](#) (hecha con Python).
- En el capítulo 7 del libro de [Vasiliev y Gutenmájér](#) hay mucho más material para «curiosear». Por ejemplo, cómo encontrar tangentes o envolventes de familias relacionadas.
- La paradoja de las monedas ([Problema 2.6](#)) es un problema clásico, y desconozco quién lo enunció por primera vez. Se llama paradoja, claro, porque la mayoría de la gente que no hace el experimento piensa inicialmente que la moneda móvil hace una vuelta, cuando en realidad hace dos.
- Hipo- y epicicloides están relacionadas con los rodamientos y engranajes, cuando dos o más círculos giran quedando algunos de los centros fijos, como se muestra en la [Figura 2.6](#). En el libro de [Vasiliev y Gutenmájér](#) se muestran algunas de estas relaciones.

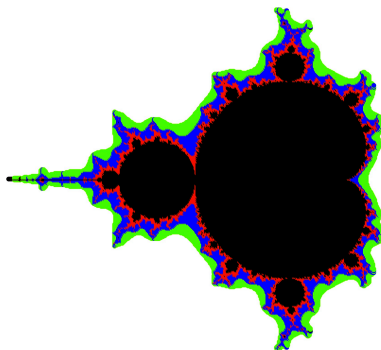


Figura 2.7: El conjunto de Mandelbrot (en negro).

- En vez del factor f que usamos, [Vasíliev y Gutenmájér](#), p. 154 consideran las k -cicloides, donde $f = |k - 1|$, lo que puede ser más natural desde las matemáticas.

También podemos pensar que la cicloide es el caso intermedio entre las hipo y las epicicloides, si mantenemos fijo el radio r' de la circunferencia móvil y hacemos crecer f (con $r = fr'$), en cuyo caso tal vez sea más natural considerar $1/f$ y darle un signo.

- Las cardioides aparecen naturalmente como rodamientos, pero también en partes más abstractas de matemáticas como el conjunto de Mandelbrot ilustrado en la [Figura 2.7](#).

Se puede demostrar que el borde de la parte negra «más gorda» es, efectivamente, una cardioide (y lo que está a su izquierda es un círculo).

3. ¿Cómo era eso?

En esta sección repasamos, muy rápidamente y demasiado informalmente, algunas ideas detrás de las nociones de derivada e integral.

3.1. La derivada

Clásicamente hay dos formas de introducir la derivada: geoméricamente como la pendiente de la tangente a una curva dada y físicamente como la velocidad.

Empecemos por la versión geométrica.

Tenemos una curva $y = f(x)$ que suponemos suficientemente suave (sin saltos ni quiebres bruscos), y queremos encontrar la ecuación de la recta tangente por el punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Poniendo $y_0 = f(x_0)$, la ecuación será de la forma

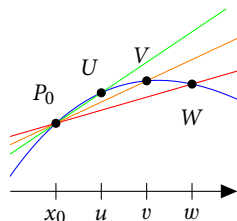
$$y = m(x - x_0) + y_0,$$

y queremos calcular la pendiente m .

Para eso calculamos las pendientes m_u de rectas secantes que cortan a la curva en P_0 y en otro punto de la forma $U = (u, f(u))$:

$$m_u = \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}.$$

Podemos apreciar, al menos gráficamente, que la pendiente m_u se parece más a la pendiente m buscada cuanto más cerca u está de x_0 . En el gráfico hemos tomado los puntos U , V y W , y correspondientemente las rectas en verde, naranja y rojo.



Si a medida que u se acerca a x_0 obtenemos valores más parecidos entre sí, podemos pensar en un valor *límite* de ellos y en ese caso ponemos

$$m = \text{pendiente de la tangente en } x_0 = \lim_{u \rightarrow x_0} \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}. \quad (3.1)$$

$u - x_0$	$(f(u) - f(x_0))/(u - x_0)$
0.1	2.61
0.01	2.9601
0.001	2.996
0.0001	2.9996
0.00001	2.99996

Cuadro 3.1: Cocientes incrementales.

Por ejemplo, con GeoGebra generamos la tabla de valores con redondeo de 5 decimales que mostramos en el Cuadro 3.1. En la columna izquierda aparece el valor de $u - x_0$, y en la de la derecha el valor del *cociente incremental* correspondiente, cuando $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ y $x_0 = -1$. Eventualmente tomando valores menores para $u - x_0$, no es difícil creer que los valores de la columna derecha se parecen cada vez más a 3. Es decir, en este caso tendremos $\lim_{u \rightarrow x_0} m_u = 3$.

Es posible que el valor límite en (3.1) no exista, pero en caso de existir decimos que m es *la derivada de f en x_0* , indicado por

$$f'(x_0) \quad \text{o} \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{o} \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}.$$

En la interpretación física de la derivada, uno piensa que $f(t)$ representa la posición de un móvil a tiempo t , la distancia recorrida en el período de tiempo entre t_0 y t ($t \neq t_0$) es $f(t) - f(t_0)$, por lo que la velocidad promedio en ese intervalo de tiempo es:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \quad (3.2)$$

Observemos que no importa si t es mayor o menor que t_0 .

Así, a medida que hacemos el intervalo de tiempo más corto, haciendo que t sea cada vez más parecido a t_0 , obtenemos la velocidad «instantánea» en el tiempo t_0 :

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

Función	Derivada	Comentarios
a	0	a constante
x^a	$a x^{a-1}$	potencia, a constante
$\text{sen } x$	$\text{cos } x$	
$\text{cos } x$	$-\text{sen } x$	
$a f(x) + b g(x)$	$a f'(x) + b g'(x)$	linealidad, a y b constantes
$f(g(x))$	$f'(g(x)) g'(x)$	regla de la cadena
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	regla del producto

Cuadro 3.2: Algunas derivadas.

es decir,

$$v(t_0) = f'(t_0). \quad (3.3)$$

Como es tedioso evaluar el límite de cada función, para calcular las derivadas se usan reglas y las derivadas de funciones ya conocidas, como las del [Cuadro 3.2](#).

No todas las funciones tienen derivadas. Por ejemplo, la función valor absoluto, $f(x) = |x|$ no tiene derivada en $x = 0$. Peor es el caso de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional,} \\ 0 & \text{si } x \text{ es racional,} \end{cases}$$

que no tiene derivadas en ningún punto (y es imposible de visualizar).

Si la derivada $f'(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$, decimos que f es *derivable en el intervalo (a, b)* (o simplemente es *derivable*). En este caso, podemos considerar la derivada de la derivada f' , obteniendo la derivada segunda f'' ; luego podemos considerar la derivada de f'' obteniendo la derivada tercera f''' , y así sucesivamente. A veces se pone

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \text{derivada } n\text{-ésima de } f \text{ (respecto de } x\text{),}$$

y se dice que n es el *orden* de la derivada.

Muchas veces diremos imprecisamente que una función es «suave» si tiene derivadas de orden suficientemente grande en todo un intervalo.

✎ La «suavidad» requerida dependerá del problema que se esté estudiando.

El estudio de las derivadas nos permite entender el comportamiento de la función original, como por ejemplo:

3.1. Propiedad. *Supongamos que f es «suave» en el intervalo abierto (a, b) . Tenemos:*

a) Si $f'(x) > 0$ en (a, b) , entonces f es estrictamente creciente en ese intervalo, es decir, si x_1 y x_2 son puntos de (a, b) , con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

Valen resultados similares si $f'(x) \geq 0$ o $f'(x) < 0$.

b) Si f alcanza un mínimo (o un máximo) en $x_0 \in (a, b)$, se tiene $f'(x_0) = 0$.

c) Si $a < x_0 < b$, $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces f alcanza un mínimo en x_0 (para valores cercanos a x_0).

Análogamente, si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, f alcanza un máximo en x_0 .

Así, la condición $f'(x_0)$ es *necesaria* para la existencia de un mínimo, pero no es *suficiente*, como podemos ver en la función $f(x) = x^3$ cuando $x_0 = 0$.

Si $f(t)$ indica la posición a tiempo t , ya vimos que la *velocidad* es $v = f'$, y ahora podemos agregar que la *aceleración* es $a = v' = f''$.

A propósito, observemos que en el caso físico podríamos pensar que $f(t)$ es un punto del plano o del espacio, con 2 o 3 coordenadas. En ese caso el cociente incremental en (3.2) y por lo tanto la derivada en (3.3) siguen teniendo sentido si pensamos que restamos vectores y dividimos el resultado de esa resta por un escalar, resultando la velocidad un vector de 2 o 3 dimensiones.

La interpretación física de la derivada en una dimensión parece no estar relacionada con la tangente, pero en realidad lo que nos da es un vector *sobre* la recta tangente.

Veamos esto en el caso de la cardioide.

Si pensamos que recorremos una unidad de ángulo por unidad de tiempo, es decir, $t = \alpha$, las ecuaciones de la cardioide en el [Problema 2.8](#) cuando $r = 1$ podrían ponerse como:

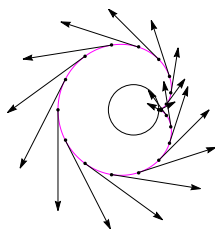
$$f(t) = (2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t),$$

y por lo tanto la velocidad a tiempo t es (¡verificarlo!)

$$v(t) = f'(t) = 2(\sin 2t - \sin t, \cos t - \cos 2t). \quad (3.4)$$

Cuando dibujamos la curva $f(t)$ y algunas de las velocidades $v(t)$ como vectores, observamos que éstas son efectivamente tangentes a la curva, tienen mayor longitud cerca de $t = \pi$ y menor longitud cerca de $t = 0$, cerca del punto cúspide.

Para $t > 0$ y pequeño estamos saliendo del punto cúspide esencialmente *hacia la derecha* y para $t < 0$ y pequeño (o t cercano pero menor a 2π) estamos llegando *desde la derecha*, por lo que al pasar t de negativo a positivo, «rebotamos» y la velocidad debe ser 0, lo que se comprueba fácilmente calculando $v(0)$ usando (3.4).



Que la velocidad se anule en $t = 0$ está relacionado con que la cardioide exhibe un «pico» en, justamente, el punto cúspide, y la recta tangente no está del todo bien definida allí.

3.2. Problema. Usando derivadas, estudiemos la validez de la [Propiedad 2.28](#) para algunas de las curvas que hemos visto, suponiendo que están parametrizadas por el tiempo.

- a) Con las notaciones del [Problema 2.8](#), ver que el segmento PM es perpendicular a la velocidad.

- ☞ Recordar que (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son ortogonales si (y solo si) su producto interno es 0 (es decir, $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$).
- b) Repetir para los casos de la epicicloide (Problema 2.17), la hipocicloide (Problema 2.21), y la cicloide (Problema 2.25).
- c) Si una cicloide está dada por las ecuaciones paramétricas (2.1), ¿para cuáles valores del tiempo la velocidad se anula y para cuáles tiene módulo máximo? Hacer el estudio analítico (tomando derivadas) y gráfico. ☞

Para finalizar, cuando la función depende de varias variables como $f(x, y, z)$, podemos tomar la derivada como función de una de ellas dejando las otras fijas, obteniendo las *derivadas parciales* que se indican mediante « ∂ » en vez de «d»:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0},$$

y expresiones similares para $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$.

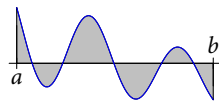
3.2. La integral

Como la derivada, la integral tiene interpretaciones tanto geométricas como físicas. Miramos acá sólo una versión de la geométrica para no ocupar demasiado tiempo, pero antes:

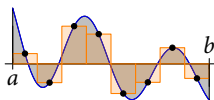
3.3. Para pensar. ¿Cómo se define el área de un rectángulo en la geometría euclidiana tradicional de la escuela?

¿Se usa algún proceso límite, tal como la aproximación de reales por racionales? ☞

Desde la geometría pensamos a la integral como el área encerrada por una curva $y = f(x)$ y el eje x sobre un intervalo de extremos a y b , sólo que las partes por debajo del eje x cuentan como negativas.



Para calcularla, aproximamos el área por rectángulos: las bases forman una partición en intervalos del intervalo original, y las alturas son los valores de la función en algún punto de cada intervalo.



Podemos usar una versión simplificada,⁽³⁾ donde dividimos el intervalo original en partes iguales, y tomamos como alturas los valores de la función en los puntos medios de los intervalos.

En este caso, si dividimos al intervalo $[a, b]$ en n partes y ponemos $h = (b - a)/n$, tendremos:

$$\begin{array}{ll} x_i = a + ih & \text{para } i = 0, 1, \dots, n \text{ (extremos),} \\ [x_{i-1}, x_i] & \text{para } i = 1, \dots, n \text{ (intervalos),} \\ \xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2 & \text{para } i = 1, \dots, n \text{ (puntos medios),} \\ y_i = f(\xi_i) & \text{para } i = 1, \dots, n \text{ (valores en puntos medios),} \end{array}$$

obteniendo que la aproximación n -ésima es:

$$s_n = \text{suma de áreas de rectángulos} = h \sum_{i=1}^n y_i. \quad (3.5)$$

Si a medida que n se hace más grande (y h más pequeño) los números s_n se parecen cada vez más («convergen») a un número, decimos que ese número es la *integral desde a hasta b de f* y ponemos

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

En realidad, *se define* el área (con signos) mediante estas aproximaciones.

La integral tiene muchas propiedades. Por ejemplo, es lineal (como la derivada): si α y β son constantes,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx,$$

⁽³⁾ Se demuestra que si f es suave no hace diferencia.

y también *monótona* (a diferencia de la derivada):

$$f(x) \leq g(x) \text{ para todo } x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x) dx.$$

3.3. Relación entre la derivada y la integral

La tangente (la derivada) y el área (la integral) parecen ser conceptos que no están relacionados, pero lo que falla aquí es nuestra intuición geométrica, ya que desde la física, donde la integral de la velocidad es la distancia, parece muy natural pensar que la derivada de la integral es la velocidad, tal como nos dice el siguiente resultado:

3.4. Teorema (fundamental del cálculo). *Sea f una función «razonable» definida en el intervalo $[a, b]$ y consideremos*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{para } a < x < b.$$

Entonces F es derivable en (a, b) y

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } a < x < b.$$

Más aún, si G es tal que $G' = f$, entonces

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b.$$

Una forma de entender el teorema es mirar a la versión discreta.

Supongamos que tenemos una sucesión de números a_1, a_2, \dots , y consideramos sus sumas parciales:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Ahora nos preguntamos: si conozco los números s_1, s_2, \dots , ¿puedo recuperar los números a_1, a_2, \dots ?

La respuesta es sí, ya que basta poner

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1},$$

por lo que $a_1 = s_1$ y $a_n = s_n - s_{n-1}$ para $n > 1$.

En el caso del teorema fundamental del cálculo, la integral toma el papel de las sumas parciales y la derivada el de los números originales, que se pueden recuperar a partir de diferencias de sumas parciales.

El **Teorema 3.4** nos permite usar el **Cuadro 3.2** para calcular integrales, tomando la columna «derivada» como la función a integrar y la columna «función» como el resultado. Por ejemplo,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2,$$

puesto que la derivada de $-\cos x$ es $\operatorname{sen} x$.

Otras reglas importantes para calcular integrales son:

Integración por sustitución: se deduce de la regla de la cadena (composición),

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(u) \, du,$$

siendo $g(\alpha) = a$ y $g(\beta) = b$.

Integración por partes: se obtiene a partir de la regla del producto,

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx.$$

3.4. Comentarios para esta parte

- Los contenidos presentados son clásicos y pueden encontrarse en muchos libros o internet.

Si *me obligaran* a decidirme sobre *un* libro accesible, sucinto y a la vez riguroso, posiblemente elegiría el de [de Leeuw \(1972\)](#).

- GeoGebra tiene comandos como **SumaRectángulos**, **SumaSuperior** y otras variantes para hacer las *sumas de Riemann*.

4. El cálculo de variaciones

Las derivadas nos permiten encontrar óptimos (máximos y mínimos) de funciones usando la [Propiedad 3.1](#). En algunos problemas algo más avanzados interesa encontrar una *función* óptima, en vez de un punto.

En esta parte veremos dos ejemplos para ilustrar este tipo de problemas y la teoría asociada a su resolución, llamada *cálculo de variaciones*.

4.1. Dos ejemplos

Supongamos que tenemos dos puntos del plano, $A = (a, \alpha)$ y $B = (b, \beta)$, y queremos encontrar una curva que los une con ciertas propiedades. Para simplificar, buscaremos sólo curvas de la forma $y = f(x)$.

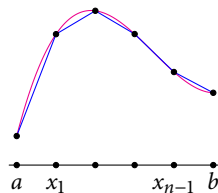
Nuestro primer problema es encontrar la curva más corta que une A con B .⁽⁴⁾

Claro que tendríamos que ver qué entendemos por longitud de una curva. Sin mucha sorpresa, recurrimos a la integral, copiando las ideas de la definición de área.

Si la curva y está dada por $y = f(x)$ con $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos de longitud $h = (b - a)/n$:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_i - x_{i-1} = h$ para $i = 1, \dots, n$.



Poniendo $P_i = (x_i, f(x_i))$ para $i = 0, 1, \dots, n$, consideramos los segmentos (en dos dimensiones) $s_i = [P_{i-1}, P_i]$, de longitud

⁽⁴⁾ En la geometría euclidiana plana, este problema fue resuelto hace ya un tiempo por Pero Grullo, pero lo hacemos aquí para sacarle las cosquillas al bicho.

$$\begin{aligned}
 \text{longitud de } s_i &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\
 &= h \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}\right)^2} \\
 &\approx h \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2},
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

si h es suficientemente chico, donde ξ_i es un punto de $[x_{i-1}, x_i]$, por ejemplo, el punto medio.

Sumando todas las longitudes de estos segmentos, obtendremos una aproximación a la longitud de la curva:

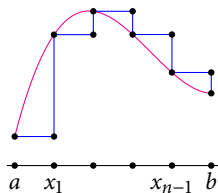
$$\text{longitud de } \gamma \approx \sum_{i=1}^n \text{longitud de } s_i \approx h \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2},$$

y las sumas (3.5) nos «empujan» a definir la longitud de la curva γ como:

$$\text{longitud de } \gamma = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

4.1. Problema. Si en vez de definir la longitud de la curva a partir de las «hipotenusas», la definiéramos a partir de los «catetos», ¿obtenríamos el mismo resultado?

☞ En el caso del área no hace diferencia definir el área por los trapecios o por los rectángulos, si bien la versión con trapecios da una aproximación mucho mejor para un n dado.



Ahora sí estamos en condiciones de plantear nuestro primer problema formalmente:

4.2. Problema (del camino más corto). Encontrar una función f «suave» definida en $[a, b]$ que minimice la distancia entre $A = (a, \alpha)$ y

$B = (b, \beta)$:

$$J(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx. \quad (4.2)$$

☞ A veces, como en este caso, para simplificar no ponemos la variable en el integrando si no da lugar a confusión: f' en vez de $f'(x)$.

Históricamente, el primer problema no trivial y que dio lugar a la teoría, es el de encontrar una *curva de descenso más rápido* entre A y B , donde suponemos que un objeto puntual en A está inicialmente en reposo y se mueve por efecto de la gravedad y sin rozamiento hacia B siguiendo la curva. Para simplificar la presentación, suponemos $A = (0, 0)$ y $B = (b, \beta)$, con $b > 0$ y $\beta < 0$.

Es decir, queremos encontrar la curva que minimice el tiempo, donde sabemos que la velocidad inicial es nula y la aceleración (en la dirección negativa del eje y) está dada por g (que suponemos constante).

☞ ¡No hacerse líos con los signos! Para compatibilizar con los gráficos que hacemos con GeoGebra, nos interesan valores de y negativos, y tomamos la aceleración de la gravedad como $g = -9.8 \text{ m/s}^2$.

Usamos la conocida fórmula de conservación de la energía,

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgy,$$

donde v es la rapidez (magnitud de la velocidad) y $|y| = -y$ es la distancia vertical que ha caído el móvil, es decir, suponemos que v no depende de la distancia recorrida en la dirección del eje x . La ecuación anterior nos dice que gy no puede ser nunca negativo.

☞ Suponiendo g constante y altura inicial 0, si el movimiento es únicamente en la dirección y , la velocidad a tiempo t es v y la velocidad inicial es v_0 , tendremos

$$v = \text{velocidad en la dirección } y = v_0 + gt,$$

por lo que

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = \frac{v^2 - v_0^2}{2g},$$

que es una versión de la conservación de la energía.

Si el movimiento sigue una curva que no es sólo vertical, suponemos que la ausencia de fricción puede hacer cambiar la dirección de la velocidad pero no su magnitud.

Conociendo la rapidez y la distancia recorrida, podemos conocer el tiempo. Sin entrar en detalles, podemos repetir las ideas usadas para encontrar la longitud de la curva, para llegar ahora a que el tiempo para ir de A a B siguiendo la curva $(x, f(x))$ es

$$J(f) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (f')^2}}{\sqrt{2gf}} dx. \quad (4.3)$$

▮ Idea: para intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ bien chiquitos, el tiempo transcurrido para ir de $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ a $(x_i, f(x_i))$ es aproximadamente (como en la ecuación (4.1))

$$\frac{\text{distancia recorrida}}{\text{rapidez promedio}} \approx \frac{\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} (x_i - x_{i-1})}{\sqrt{2gy}}$$

Podemos ahora enunciar el problema de la *braquistocrona* (*brachistos* = más corto, *chronos* = tiempo), propuesto por Johann Bernoulli en 1696:

4.3. Problema (de la braquistocrona). Con las notaciones anteriores, encontrar una función $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (no muy loca) que minimice

$$J(f) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (f')^2}}{\sqrt{-f}} dx, \quad (4.4)$$

sujeto a las condiciones

$$f(0) = 0, \quad f(b) = \beta, \quad y \quad f(x) \leq 0 \quad \text{para todo } x \in [0, b],$$

es decir, que minimice el tiempo para ir de $A = (0, 0)$ a $B = (b, \beta)$, empezando desde una posición de reposo, sólo bajo el efecto de la gravedad y sin rozamientos.

Algunos comentarios:

- Para pasar de (4.3) a (4.4) usamos que el problema de minimización no cambia si multiplicamos la función objetivo por una constante positiva, en este caso $\sqrt{-2g}$.
 - El denominador $\sqrt{-f(x)}$ se anula para $x = 0$, y hay que tener cuidado en la definición de la integral: cerraremos los ojos.
 - Recordar que estamos considerando sólo curvas «suaves» y que puedan ponerse en la forma $y = f(x)$.
- 🔗 Algo más tonto: el diccionario de la Real Academia Española no incluye a la palabra *braquistocrona* ni tampoco a la palabra *braquistócrona*. En los textos se la puede ver escrita con y sin tilde. Arbitrariamente acá usamos la versión sin tilde.

Estos dos ejemplos, el de la distancia más corta y el del tiempo más corto, motivan el estudio más general del *problema del cálculo de variaciones*:

4.4. Problema (del cálculo de variaciones). Dada una función F de las variables x , u y p , suficientemente «suave», encontrar una función f definida en el intervalo $[a, b]$ que minimice

$$J(f) = \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx, \quad (4.5)$$

sujeto a $f(a) = y_a$ y $f(b) = y_b$.

Así, en el [Problema 4.2](#) tenemos

$$F(x, u, p) = \sqrt{1 + p^2}, \quad f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta,$$

mientras que en el [Problema 4.3](#) tenemos

$$F(x, u, p) = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{-u}}, \quad f(0) = 0, \quad f(b) = \beta.$$

4.2. La técnica

Una idea para resolver estos problemas es tratar de reducirlo a uno de una variable real y usar derivadas.

Para eso necesitamos un par de resultados previos.

4.5. Problema. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- a) Con GeoGebra, hacer el gráfico de φ_1 para $n = 2, 3, 10, 20$, comprobando visualmente que las derivadas de φ_1 se anulan en 0.
 b) Sin usar GeoGebra, ¿cómo será el gráfico de las funciones

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x+1), \quad \varphi_3(x) = \varphi_1(1-x), \quad \varphi(x) = \varphi_2(x) \times \varphi_3(x) ?$$

Comprobar la respuesta usando GeoGebra.

- c) Repetir el apartado anterior si

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

haciendo los gráficos correspondientes.

↷ Se puede demostrar formalmente que las derivadas de cualquier orden de φ_1 se anulan en $x = 0$. ✂

4.6. Teorema (Lema fundamental del cálculo de variaciones). Si una función f (no muy «salvaje») definida en el intervalo $[a, b]$ es tal que

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = 0$$

para toda φ «suave» que se anula en los extremos a y b , entonces

$$f(x) = 0 \quad \text{para todo } x \in (a, b).$$

Idea de la demostración. Si $f(x_0) \neq 0$ en algún punto $x_0 \in (a, b)$, podemos encontrar un intervalo

$$(x_0 - d, x_0 + d) \subset (a, b),$$

donde f tenga siempre el mismo signo y no se anule. Sin pérdida de generalidad (eventualmente cambiando el signo de f), podemos suponer que $f(x) > 0$ para $x \in (x_0 - d, x_0 + d)$. Consecuentemente, podemos encontrar d' , tal que $0 < d' < d$, y una función φ suave que sea estrictamente positiva en $(x_0 - d', x_0 + d')$ y se anule fuera de ese intervalo,⁽⁵⁾ y entonces

$$f(x)\varphi(x) > 0 \quad \text{para } x \in (x_0 - d', x_0 + d'),$$

y $f(x)\varphi(x)$ se anula fuera de ese intervalo.

Por la monotonía de la integral,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx > 0,$$

contradiciendo la hipótesis. □

Supongamos ahora que el mínimo de la funcional J en (4.5) se alcanza en f .

Tomando una función φ que se anule en a y b (como en el [Problema 4.5](#)), observamos que la función $f + t\varphi$, donde t es un número real, satisface las mismas restricciones que f . Dado que J tiene un mínimo en f , la función

$$\Phi(t) = J(f + t\varphi) = \int_a^b F(x, f(x) + t\varphi(x), f'(x) + t\varphi'(x)) dx,$$

⁽⁵⁾ Ver el [Problema 4.5](#).

tiene un mínimo en $t = 0$ y por lo tanto su derivada se anula en $t = 0$,

$$0 = \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_0 = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}(x, f(x), f'(x))\varphi(x) + \frac{\partial F}{\partial p}(x, f(x), f'(x))\varphi'(x) \right) dx, \quad (4.6)$$

donde suponemos que la derivada de la integral es la integral de la derivada.

⚡ Esto generaliza a la regla «la derivada de la suma es la suma de las derivadas», pero el cambio de suma por integral hace que la regla no sea siempre cierta.

No confundir con el enunciado similar del teorema fundamental del cálculo ([Teorema 3.4](#)): acá los extremos de integración están fijos.

Integrando por partes la última integral y usando que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, nos queda

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{\partial F}{\partial p}(x, f(x), f'(x)) \varphi'(x) dx \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial p}(x, f(x), f'(x)) \varphi(x) \right|_a^b \\ & \quad - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p}(x, f(x), f'(x)) \right) \varphi(x) dx \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p}(x, f(x), f'(x)) \right) \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Juntando las ecuaciones (4.6) y (4.7), y el [Teorema 4.6](#), obtenemos:

4.7. Teorema (Ecuación de Euler-Lagrange). Si J tiene un mínimo en la función «suave» f , entonces

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, f(x), f'(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p}(x, f(x), f'(x)) \right). \quad (4.8)$$

Lo que hemos hecho es similar a lo mencionado en la [Proposición 3.1](#): la ecuación de Euler-Lagrange debe cumplirse en un mínimo, pero si la ecuación se cumple no quiere decir que estemos en un mínimo. Más aún, la [ecuación \(4.8\)](#) también se cumpliría en un máximo si lo hubiera, ya que sólo estamos generalizando lo que sucede con derivadas.

✎ Se pueden dar condiciones de «segundo orden», análogas al criterio $f''(x_0) > 0$ en una variable, pero no seguiremos ese camino.

La [ecuación \(4.8\)](#) es un ejemplo de *ecuación diferencial*, donde la incógnita no es un número como en las ecuaciones a las que estamos acostumbrados, sino una función.

Cuando la función F en [\(4.5\)](#) no depende explícitamente de x , como en los problemas [4.2](#) y [4.3](#), la [ecuación de Euler-Lagrange \(4.8\)](#) puede simplificarse un tanto:

4.8. Teorema (Identidad de Beltrami). *Si la función F en [\(4.5\)](#) no depende explícitamente de x , entonces [\(4.8\)](#) implica*

$$F - f' \frac{\partial F}{\partial p} = C, \quad (4.9)$$

para alguna constante C .

Hagamos la demostración sin detenernos en detalles.

Demostración. Tomando

$$h = F - f' \frac{\partial F}{\partial p},$$

queremos demostrar que $dh/dx = 0$.

Primero observamos que, como F no depende de x , $\partial F/\partial x = 0$ y

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x), f'(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} f' + \frac{\partial F}{\partial p} f'' = \frac{\partial F}{\partial u} f' + \frac{\partial F}{\partial p} f''.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial u} f' + \frac{\partial F}{\partial p} f'' - f'' \frac{\partial F}{\partial p} (x, f(x), f'(x)) \\ &\quad - f' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p} (x, f(x), f'(x)) \right) \\ &= f' \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) \right). \end{aligned}$$

El resultado sigue de la la definición de h y la [ecuación de Euler-Lagrange \(4.8\)](#). \square

4.3. Encontrando el camino más corto

En el [Problema 4.2](#) J está dado por la [funcional en \(4.2\)](#), es decir

$$F(x, u, p) = \sqrt{1 + p^2},$$

que no depende de u , de modo que la [ecuación de Euler-Lagrange \(4.8\)](#) se reduce a

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial p} (x, f(x), f'(x)) \right) = 0.$$

Como la derivada es nula, existe una constante C tal que

$$C = \frac{\partial F}{\partial p} (x, f(x), f'(x)) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \Big|_{p=f'(x)}.$$


De aquí que $|C| < 1$ y

$$(f'(x))^2 = \frac{C^2}{1 - C^2},$$

o sea, que si f es mínimo para J debe existir una constante K tal que

$$f'(x) = K \quad \text{para todo } x.$$

En otras palabras, el gráfico de f es (parte de) una recta, y el camino más corto entre dos puntos en el plano es sobre una recta.

4.9. Problema. Llegar a las mismas conclusiones usando la [identidad de Beltrami \(4.9\)](#). 

4.4. La braquistocrona

Como ya mencionamos, en este caso tenemos

$$F(x, u, p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{-u}}.$$

Como F no depende de x , la [identidad de Beltrami \(4.9\)](#) nos dice que existe una constante C tal que

$$\begin{aligned} C &= f' \frac{\partial F}{\partial p} - F = f' \frac{f'}{\sqrt{1+(f')^2} \sqrt{-f}} - \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{\sqrt{-f}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+(f')^2} \sqrt{-f}}, \end{aligned}$$

o más sencillamente,

$$\left(1+(f')^2\right) f = K, \quad (4.10)$$

para alguna constante $K < 0$ ($K = -1/C^2$).

Sin meternos en la unicidad de soluciones, veamos que la cicloide de ecuaciones paramétricas

$$x = r(t - \operatorname{sen} t), \quad y = -r(1 - \operatorname{cos} t), \quad (4.11)$$

donde r es una constante positiva, satisface la [ecuación \(4.10\)](#).

Dado que estamos reflejando una curva como la de la [Figura 2.3](#) en el eje x , podemos definir (aunque no muy explícitamente) a y como función de x , digamos $y = f(x)$.

4.10. Problema. Supongamos que $c(t) = (x(t), y(t))$ es la ecuación paramétrica de una curva que también puede expresarse como $y = f(x)$. Demostrar que si $dx/dt \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad (4.12)$$

☛ Aplicar la regla de la cadena a $y(t) = y(x(t))$ (abusando de la notación). ☞

La ecuación (4.12) aplicada a las ecuaciones (4.11) nos da

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\operatorname{sen} t}{1 - \cos t},$$

y el miembro izquierdo de (4.10) es

$$-r(1 - \cos t) \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{(1 - \cos t)^2} \right) = -2r,$$

por lo que la cicloide satisface la identidad de Beltrami, siendo $K = -2r$ en (4.10).

Así, si existe un mínimo «suave» para el problema de la braquistocrona, debe ser la cicloide de ecuaciones (4.11), contradiciendo nuestra intuición de que el camino más rápido debe ser el más corto (un segmento).

4.11. Problema. Con las notaciones del Problema 4.10, demostrar:

a) Si $x(t_0) = x_0$ y $x(t_1) = x_1$, con $t_0 < t_1$, entonces

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{|y|}} dx = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}}{\sqrt{|y|}} dt.$$

☛ Hacer la sustitución $x = x(t)$ y usar $dx = (dx/dt) dt$.

b) Si además x y y están dadas por (4.11), la integral en a) es

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{|y|}} dx = \sqrt{2r}(t_1 - t_0). \quad \gg$$

Antes de continuar, recalquemos un par de cosas:

- Si bien hemos llamado t a la variable que parametriza la curva en (4.11),

t no representa el tiempo.

O sea que el vector tangente, digamos $(dx/dt, dy/dt)$, en general *no es la velocidad del móvil.*

- Recordando la [Proposición 3.1](#),

no hemos demostrado que el mínimo es una cicloide,

sino

si hay un mínimo «suave», debe ser una cicloide.

De cualquier forma, y aún suponiendo que efectivamente el mínimo es la cicloide mencionada, nos falta encontrar un valor para r y valores iniciales y finales de t , de modo que se satisfagan las condiciones:

$$x(t_{\text{inicial}}) = y(t_{\text{inicial}}) = 0, \quad x(t_{\text{final}}) = b, \quad y(t_{\text{final}}) = \beta, \quad (4.13)$$

donde $b > 0$ y $\beta < 0$. Mirando las [ecuaciones \(4.11\)](#), vemos que no hay problemas en poner

$$t_{\text{inicial}} = 0,$$

pero no es claro cómo elegir r y t_{final} .

- ⚠ La función resultante no es exactamente «suave» en el origen, ya que $f'(0)$ es «infinito». Como en otras ocasiones, cerraremos los ojos.

Nos deshacemos de r si tomamos el cociente x/y en (4.11), y nos queda estudiar la función $z : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$z(t) = -\frac{t - \operatorname{sen} t}{1 - \operatorname{cos} t} \quad \text{para } 0 < t < 2\pi,$$

y $z(0) = 0$.

4.12. Problema.

a) Haciendo un gráfico de la función z con GeoGebra, ver que z es estrictamente decreciente y alcanza cualquier valor real negativo. Es decir, z es una biyección entre $[0, 2\pi)$ y $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

✎ Aunque se puede hacer formalmente, acá nos conformamos con el estudio visual del gráfico.

b) Usando la función Raíz de GeoGebra, calcular aproximadamente t_{final} de modo que $z(t_{\text{final}}) = b/\beta$ para el caso $b = 1$ y $\beta = -1$, y luego encontrar una solución aproximada de r para ese caso.

c) Graficar la curva $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por (4.11) con el parámetro r encontrado anteriormente.


d) Graficar el punto $B = (b, \beta)$, comprobando que B está sobre la curva c .

e) Graficar el punto C de la curva c que tiene mínima ordenada, comprobando que $B \neq C$.

f) En cada caso, encontrar valores de b y β de modo que:

i) B coincida con C .

ii) B deje de un mismo lado a A y C (a diferencia del caso $B = (1, -1)$).

✎ El último apartado muestra que el camino más rápido puede ir más abajo que B y termine «subiendo» a B . 

Observemos que los parámetros r y t_{final} que definen la curva dependen sólo de b y β , pero no del valor de la aceleración g : no importa si estamos en la Tierra o en la Luna, mientras queramos ir desde $A = (0, 0)$ hasta $B = (b, \beta)$ la curva es la misma.

Un poco antes del planteo de Johann Bernoulli, Galileo en su libro *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze* (Galilei, 1638) propuso un problema similar al de la braquistocrona, preguntándose cuál era la curva óptima para ir lo más rápido posible desde el punto $A = (0, 0)$ a la recta $x = b$ ($b > 0$), o sea, dejando fijo el valor de b pero libre el de β .

Galileo vio que usando un cuarto de circunferencia era más rápido que ir por una recta, pero nosotros ya sabemos que la curva óptima es (parte de) una cicloide invertida, y todo lo que tenemos que hacer es determinar el valor de β , lo que hacemos —algo informalmente— en el siguiente problema.

✎ En los comentarios finales mencionamos una versión formal.

4.13. Problema (de Galileo). Para simplificar los cálculos, en este problema suponemos que el valor de g es tal que el tiempo está dado por la funcional J en (4.4). b será un número real positivo arbitrario pero el mismo en todos los apartados.

Por lo que vimos anteriormente, si $t_{\text{inicial}} = 0$ y $\beta < 0$, existen valores únicos de r y t_{final} (dependientes de b y β) que satisfacen las ecuaciones (4.13).

a) Ver que el tiempo $T(\beta)$ que se tarda en llegar desde $A = (0, 0)$ al punto $B = (b, \beta)$ es $\sqrt{r} \times t_{\text{final}}$.

☞ Recordar el Problema 4.10.b).

b) Ver que $T(\beta)$ puede expresarse sólo en términos de b y t_{final} , obviando r :

$$T(\beta) = \sqrt{\frac{b}{t_{\text{final}} - \text{sen } t_{\text{final}}}} \times t_{\text{final}}.$$

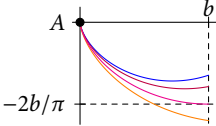
☞ r y t_{final} están relacionados por $b = r(t_{\text{final}} - \text{sen } t_{\text{final}})$.

c) Ver que encontrar el mínimo de $T(\beta)$ (con β variando pero $b > 0$ fijo) se reduce a encontrar el mínimo de

$$h(t) = \frac{t^2}{t - \text{sen } t},$$

para $0 < t < 2\pi$.

Hacer el gráfico de h y encontrar su mínimo usando GeoGebra. Luego verificar la respuesta calculando $h'(\pi)$.

- d) Concluir que para b dado, el valor óptimo β_{opt} para β es $-2b/\pi$, correspondiente a la cicloide cuyo punto inferior tiene abscisa b .
- e) Usando GeoGebra y tomando $b = 1$ (o cualquier otro valor fijo), comparar las soluciones para valores de β distintos de β_{opt} , haciendo los gráficos y calculando los tiempos correspondientes. 

4.5. Comentarios para esta parte

- Johann Bernoulli propuso el problema de la braquistocrona en 1696, publicando su solución el año siguiente junto a las soluciones de Jakob Bernoulli (hermano de Johann), L'Hôpital, Newton y Tschirnhaus. Leibniz, quien también había resuelto el problema, renunció a su solución ya que había otras similares.
- La técnica usada por los hermanos Bernoulli es un tanto diferente a la que presentamos.

El *cálculo de variaciones* o *cálculo variacional* fue desarrollado inicialmente por Jakob Bernoulli y perfeccionado por Euler y Lagrange hacia 1750 (de ahí el nombre de la [ecuación \(4.8\)](#)). Fue el mismo Euler quien le dio el nombre a la teoría en 1766.

- Muchas teorías físicas adoptaron los *principios variacionales*, como por ejemplo, que la luz sigue el camino más corto.
- Hoy en día, el cálculo variacional es una herramienta fundamental en muchas ramas de la ciencia y la tecnología. Sus aplicaciones no se restringen al estudio de objetos unidimensionales como trayectorias, sino que incluyen temas tan variados como diseños de superficies y volúmenes óptimos o teoría de control.

En fin, la técnica del [Teorema 4.6](#) se aplica en el estudio de ecuaciones diferenciales —no necesariamente provenientes del

cálculo de variaciones— y su cálculo numérico.

- La braquistocrona (cicloide invertida) tiene también la propiedad de ser *tautocrona* (*tauto* = a sí misma): si empieza del reposo, no importa cuál sea la posición original sobre la curva, el móvil tardará siempre el mismo tiempo en llegar a la parte inferior de la curva, o equivalentemente, el período de oscilación es independiente de la posición original, aunque esta última propiedad la convierte en *isocrona* (*iso* = igual).

Así, suponiendo las ecuaciones (4.11), la parte inferior se encuentra en $t = \pi$, el tiempo en llegar allí es $\pi\sqrt{-r/g}$ y el período de oscilación es $4\pi\sqrt{-r/g}$, no importa cuál sea la posición inicial.

- Ya Johann Bernoulli había observado que la solución al problema de la braquistocrona es también solución al problema de la isocrona, resuelto por Huygen en 1659.

Por similitud con el nombre dado por Huygen, Johann Bernoulli propuso el nombre de braquistocrona.

- Hoy en día hay cierta discusión sobre si la cicloide brinda el mejor perfil para las rampas para patinetas (*skate half-pipe*), esquí o deportes similares.
- El problema 4.13 se generaliza a todos los problemas de la forma 4.4 en que uno de los extremos queda fijo, digamos $f(0) = 0$ y el otro libre, o sea, $f(b)$ puede tomar cualquier valor.

En este caso, una variante del teorema 4.6 lleva a que la relación (4.7) implique

$$\frac{\partial F}{\partial p}(b, f(b), f'(b)) = 0.$$

En el caso del problema 4.13 esto nos dice que $f'(b) = 0$, y las ecuaciones (4.11) y (4.12) llevan a que el óptimo β , y correspondientes r y t_{final} se obtengan a partir de

$$t_{\text{final}} = \pi, \quad b = r\pi, \quad \beta = -2r = -\frac{2b}{\pi}.$$

- Hay mucho material sobre sobre el cálculo de variaciones, tanto en publicaciones como en internet, pero hay pocos libros en castellano.

Entre los muchos libros en inglés, dos «clásicos» para mencionar son el libro de [Bliss \(1925\)](#) y el de [Gelfand y Fomin \(2000\)](#) (una versión corregida de la traducción inglesa de 1963).

Referencias

G. A. BLISS, 1925. *Calculus of Variations*. Mathematical Association of America. (citado en pág. 44)

K. DE LEEUW, 1972. *Calculus*. Eudeba. (citado en pág. 26)

G. GALILEI, 1638. *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*. Elzevir (Elsevier). Varias versiones disponibles en internet. (citado en pág. 41)

I. M. GELFAND Y S. V. FOMIN, 2000. *Calculus of Variations*. Dover. (citado en pág. 44)

INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE. *GeoGebra*. <http://www.geogebra.org>. (citado en pág. 1)

N. B. VASÍLIEV Y V. L. GUTENMÁJER, 1980. *Rectas y curvas*. MIR, Moscú. (citado en págs. 1, 2, 14, 16 y 17)