



Buenos Aires 21 de octubre de 2020

Estimado Alumno

El Comité Olímpico de la Olimpiada Matemática Argentina ha designado a los alumnos que se destacaron en la Olimpiada Nacional y en competencias internacionales durante el año 2019, y sean alumnos regulares de Enseñanza Secundaria en 2020, a participar en la Séptima IGO (Olimpiada Iraní de Geometría).

La prueba tendrá lugar el viernes 30 de octubre a las 9 horas y será en forma virtual (ver explicación al pie).

Hay tres niveles:

Elemental para alumnos de 7º y 8º grados (contando desde 1º de primaria).

Medio para alumnos de 9º y 10º grados.

Avanzado para alumnos de 11º y 12º grados.

La prueba consta de 5 problemas que deberán ser resueltos en 4 horas y media. No se puede consultar libros ni usar calculadora o computadora.

Se seleccionarán, en total, las pruebas de 4 alumnos de cada nivel, y esos serán los representantes argentinos en esta competencia.

Acompañan a esta convocatoria las pruebas de los años 2015, 2016 y 2017 que pueden servir de entrenamiento.

No te olvides de inscribirte en el link <https://forms.gle/aZFhSaZTb3Tmx31g6>

Cordialmente.


Patricia Fauring
Comité Olímpico


Flora Gutierrez
Comité Olímpico

Instrucciones para dar la prueba

Los alumnos deberán inscribirse en el siguiente formulario, en el que obligatoriamente deberán consignar una dirección de Gmail, para recibir la prueba y el link de Meet.

<https://forms.gle/aZFhSaZTb3Tmx31g6>

Los alumnos deberán resolver la prueba en papel con birome negra y luego escanear sus hojas generando un **único archivo** PDF, que tendrán que enviar por mail a la siguiente dirección omapruebas@gmail.com (exclusivamente para recibir pruebas, no se contestarán consultas de ningún tipo. **Importante:** en el asunto del mail escribir nombre, DNI y nivel del participante (ejemplos "Juan Pérez - 45673298 - Elemental" o "María Pérez - 43278130 - Medio" o "María Rodríguez - 43278130 - Avanzado").

Tratando de aproximarnos a la modalidad de resolución presencial, intentaremos generar un ambiente lo más parecido posible a lo que fueron los certámenes antes de la pandemia. Es por ello, que la prueba estará organizada en grupos de aproximadamente quince alumnos y cada grupo estará conectado a través de Meet con un coordinador de oma quien supervisará que el certamen se esté llevando a cabo con las características deseadas y que se indican más abajo.

Para ello, estarán recibiendo, veinte minutos antes de la prueba, un link de invitación para conectarse **con cámara activa durante las cuatro horas y media que durará el certamen.**

Escaneo de la prueba

Existen varias aplicaciones que permiten escanear y convertir a PDF usando la cámara del celular, una de ellas es CamScanner. Aquí hay un video que explica cómo descargarla y usarla: <https://www.youtube.com/watch?v=yDDetBN9nog>.

Si nunca hicieron esto antes deben aprender a usarlo antes de la prueba (o sea que hagan el ensayo de escanear al menos dos hojitas armando un PDF) y revisen que el archivo quede legible y no le falten páginas.

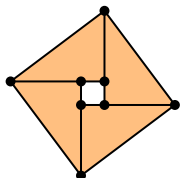
El tiempo límite para el escaneo y envío de la prueba será el viernes 30 de octubre a las 14:00 hs.

Problemas de la segunda olimpiada iraní de geometría

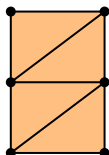
Nivel Elemental: alumnos de 7º y 8º grados

1. Se tienen cuatro triángulos iguales de madera de lados 3, 4 y 5 centímetros. ¿Cuántos polígonos convexos se pueden formar usando todos estos triángulos? (Dibujar los polígonos sin hacer demostraciones.)

Un polígono convexo es un polígono con todos sus ángulos menores que 180° y que no tiene huecos. Por ejemplo:



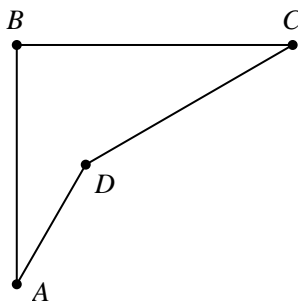
Este polígono no es convexo



Este polígono es convexo

2. Sea ABC un triángulo con $A = 60^\circ$. Los puntos M, N, K están en BC, AC, AB respectivamente, de modo que $BK = KM = MN = NC$. Si $AN = 2AK$, hallar los valores de B y C .

3. En la figura que se muestra a continuación sabemos que $AB = CD$, $BC = 2AD$, $BCD = 30^\circ$ y $ABC = 90^\circ$. Demostrar que $BAD = 30^\circ$.



4. En un rectángulo $ABCD$, los puntos M, N, P, Q están en AB, BC, CD, DA respectivamente de modo que las áreas de los triángulos AQM, BMN, CNP, DPQ son iguales. Demostrar que el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.

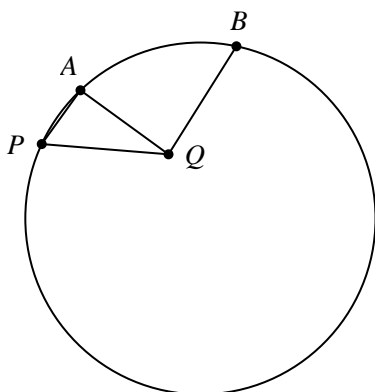
5. Determinar si existen 6 circunferencias del plano tales que cada circunferencia pasa por los centros de exactamente 3 de las otras circunferencias.

*Tiempo: 3 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos*

Problemas de la segunda olimpiada iraní de geometría

Nivel Medio: alumnos de 9° y 10° grados

1. En la figura, los puntos P, A, B están en una circunferencia. El punto Q está en el interior de la circunferencia de modo que $\angle PAQ = 90^\circ$ y $PQ = BQ$. Demostrar que el valor de $\angle AQB - \angle PQA$ es igual al arco AB (o sea, igual al ángulo $\angle AOB$, donde O es el centro de la circunferencia).



2. En el triángulo acutángulo ABC , BH es la altura desde el vértice B . Los puntos D y E son puntos medios de AB y AC respectivamente. Supongamos que F es el simétrico de H con respecto a ED . Demostrar que la recta BF pasa por el circuncentro del triángulo ABC .

3. En el triángulo ABC los puntos M, N, K son puntos medios de BC, CA, AB respectivamente. Sean ω_b y ω_c dos semicircunferencias de diámetros AC y AB respectivamente, exteriores al triángulo. Supongamos que MK y MN cortan a ω_c y ω_b en X e Y respectivamente. Si las tangentes trazadas por X e Y a ω_c y ω_b respectivamente se cortan en Z , demostrar que $AZ \perp BC$.

4. Sea ABC un triángulo equilátero cuya circunferencia circunscrita es ω y cuyo circuncentro es O . Sea P un punto del arco BC . La tangente a ω trazada por P corta las prolongaciones de AB y AC en K y L respectivamente. Demostrar que $\angle KOL > 90^\circ$.

5. a) Determinar si existen 5 circunferencias en el plano tales que cada circunferencia pasa por los centros de exactamente 3 de las otras circunferencias.

b) Determinar si existen 6 circunferencias en el plano tales que cada circunferencia pasa por los centros de exactamente 3 de las otras circunferencias.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos

Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la segunda olimpiada iraní de geometría

Nivel Avanzado: alumnos de 11° y 12° grados

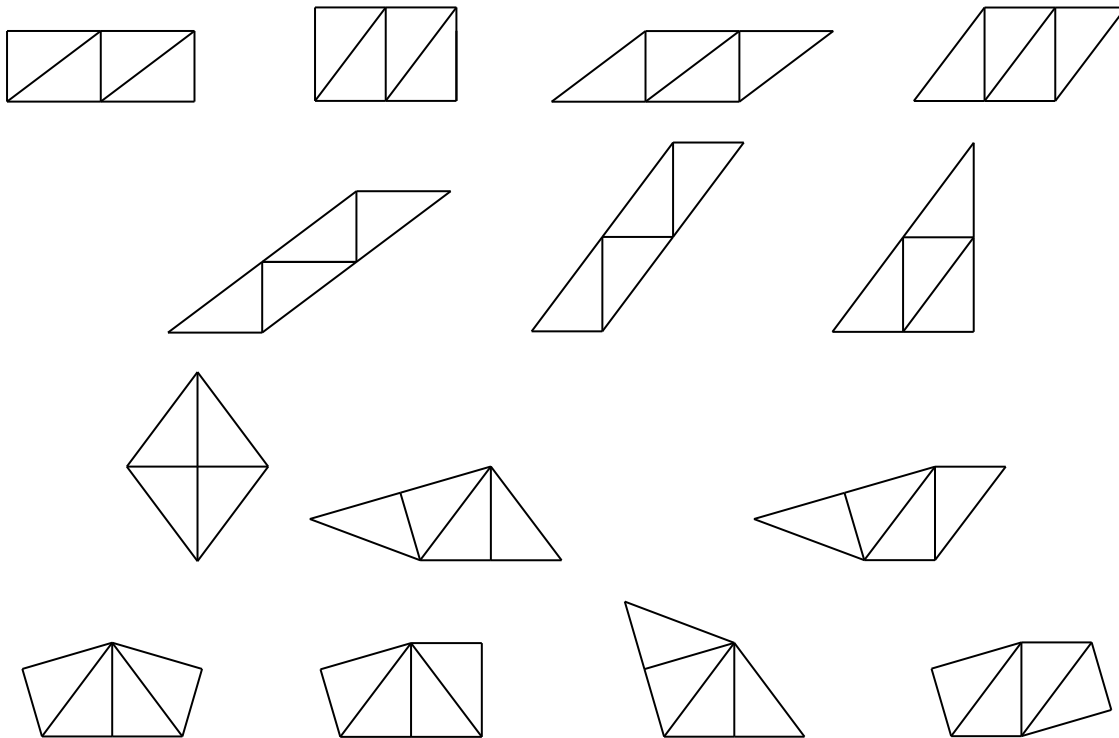
1. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 (de centros O_1 y O_2 respectivamente) se cortan en A y B . El punto X pertenece a ω_2 . Sea Y un punto de ω_1 tal que $\angle XBY = 90^\circ$. Sea X' el segundo punto de intersección de la recta O_1X y ω_2 , y sea K el segundo punto de intersección de $X'Y$ y ω_2 . Demostrar que X es el punto medio del arco AK .
2. Sea ABC un triángulo equilátero cuya circunferencia circunscrita es ω y cuyo circuncentro es O . Sea P un punto del arco BC . La tangente a ω trazada por P corta las prolongaciones de AB y AC en K y L respectivamente. Demostrar que $\angle KOL > 90^\circ$.
3. Sea H el ortocentro del triángulo ABC . Sean l_1 y l_2 dos rectas que pasan por H perpendiculares entre sí. La recta l_1 corta a BC y a la prolongación de AB en D y Z respectivamente, y la recta l_2 corta a BC y a la prolongación de AC en E y X respectivamente. Sea Y un punto tal que $YD \parallel AC$ y $YE \parallel AB$. Demostrar que X, Y, Z están alineados.
4. En el triángulo ABC dibujamos la circunferencia de centro A y radio AB . Esta circunferencia corta a AC en dos puntos. También dibujamos la circunferencia de centro A y radio AC y esta circunferencia corta a AB en dos puntos. Denotamos a estos cuatro puntos A_1, A_2, A_3, A_4 . Los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 y C_1, C_2, C_3, C_4 se definen de manera similar. Supongamos que estos 12 puntos están en dos circunferencias. Demostrar que el triángulo ABC es isósceles.
5. Los rectángulos ABA_1B_2 , BCB_1C_2 , CAC_1A_2 son exteriores al triángulo ABC . Sea C' un punto tal que $C'A_1 \perp A_1C_2$ y $C'B_2 \perp B_2C_1$. De manera similar se definen los puntos A' y B' . Demostrar que las rectas AA' , BB' , CC' son concurrentes.

*Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos*

Soluciones Segunda IGO (2015)

Nivel Elemental

Problema 1.

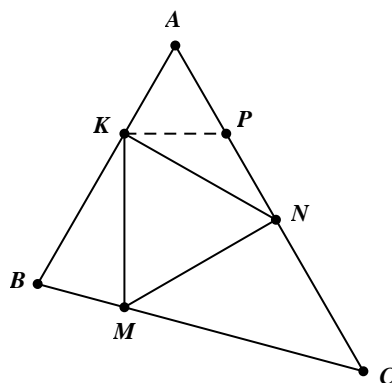


Problema 2.

Supongamos que P es el punto medio de AN . Entonces $AK = AP = AN$ y podemos afirmar que el

triángulo APK es equilátero. Luego $\angle ANK = \frac{\angle KPA}{2} = 30^\circ$. Sea $\angle ACB = \angle NMC = \alpha$. Entonces

$\angle ABC = \angle KMB = 120^\circ - \alpha$. De modo que $\angle KMN = 60^\circ$. Luego el triángulo KMN es equilátero. Ahora sabemos que $\angle MNA = 90^\circ$. Entonces $\alpha = 45^\circ$. De modo que $\angle C = 45^\circ$ y $\angle B = 75^\circ$.

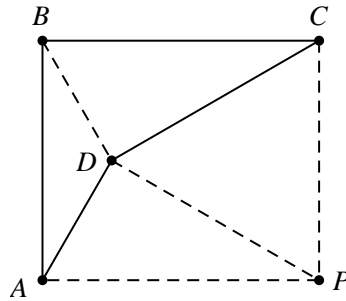


Problema 3.

Sea P tal que el triángulo DCP es equilátero. Sabemos que $PC \perp BC$ y $PC = CD = AB$, luego el cuadrilátero $ABCP$ es un rectángulo, luego $\angle APD = \angle APC - \angle DPC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Por otro lado, $DP = DC$ y $AP = BC$. De modo que los triángulos ADP y BDC son congruentes. Entonces $AD = BD$.

Sea H en CD tal que $BH \perp CD$,
 luego $BH = \frac{BC}{2} = BD$, de
 manera que podemos afirmar que
 D y H coinciden y $BDC = 90^\circ$.
 Luego $ABD = BAD = 30^\circ$.



Problema 4.

Sean $AB = CD = a$, $AD = BC = b$ y $AM = x$, $AQ = z$, $PC = y$, $NC = t$. Si $x \neq y$ podemos suponer que $x > y$. Sabemos que

$$y < x \Rightarrow a - x < a - y \quad (1)$$

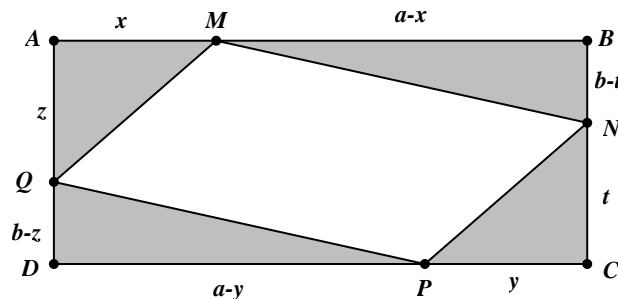
$$S_{AQM} = S_{CNP} \Rightarrow zx = yt \Rightarrow z < t \Rightarrow b - t < b - z. \quad (2)$$

De acuerdo con las desigualdades (1) y (2):

$$(a - x)(b - t) < (a - y)(b - z) \Rightarrow S_{BMN} < S_{DPQ}$$

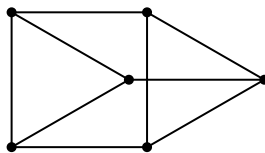
que es una contradicción. Luego $x = y$, de modo que $z = t$. Podemos afirmar que los triángulos AMQ y CPN son congruentes. Luego $MQ = NP$ y de modo similar $MN = PQ$. Luego el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.

Nota. Si el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo, de modo similar podemos demostrar que el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.



Problema 5.

En la figura tenemos 6 puntos del plano tales que para todo punto hay exactamente 3 de los otros en una circunferencia de radio 1.



Nivel Medio

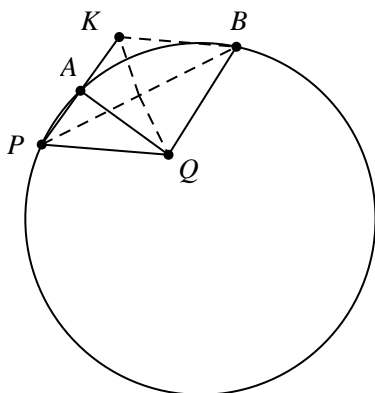
Problema 1.

Sea K el simétrico de P con respecto a AQ . Tenemos que demostrar que $2APB = AQB - AQP$.

Sabemos que AQ es la mediatriz de PK . De modo que $AQP = AQB$ y $PQ = KQ = BQ$, luego Q es el circuncentro del triángulo PKB . Sabemos que

$$2APB = KQB = AQB - AOK = AQB - AQP .$$

Entonces al restar AQB de PQA obtenemos el arco AB .



Problema 2.

Sea O el circuncentro del triángulo ABC . Sabemos que el cuadrilátero $ADOE$ es cíclico. Además sabemos que $AD = HD = DB$, luego

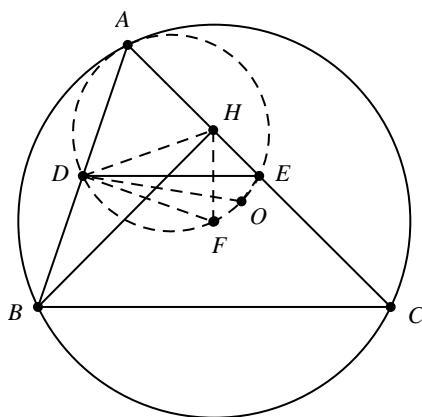
$$A = DHA = 180^\circ - DHE = 180^\circ - DFE$$

De modo que $ADFE$ es cíclico.

Así podemos afirmar que $ADFOE$ es cíclico, y en consecuencia, $DFOE$ es cíclico. Luego

$$C = DEA = DEF = DOF .$$

Por otro lado, $C = DOB$ luego $DOF = DOB$, y tenemos que B, F y O están alineados.



Problema 3.

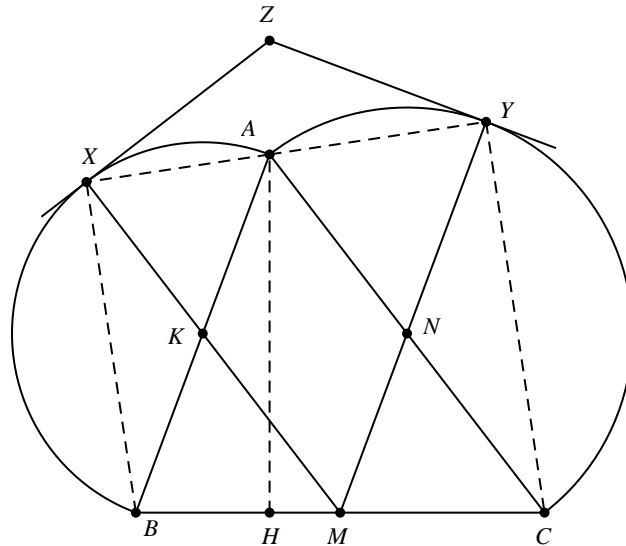
Sea H en BC tal que $AH \perp BC$. Entonces los cuadriláteros $AXBH$ y $AYCH$ son cíclicos. Sabemos que KM y MN son paralelas a AC y AB respectivamente. De modo que podemos decir que

$AKX = ANY = A$, luego $ABX = ACY = \frac{A}{2}$ y $XAB = YAC = 90^\circ - \frac{A}{2}$. Entonces X, A, Y son

colineales.

$$AHX = ABX = \frac{A}{2} \text{ y } AHY = ACY = \frac{A}{2} \Rightarrow XHY = XMY = A .$$

Por lo tanto el cuadrilátero $XHMY$ es cíclico. Además sabemos que $MXZ = MYZ = 90^\circ$, luego el cuadrilátero $MXZY$ es cíclico. De modo que $ZXHMY$ es cíclico, luego el cuadrilátero $HXZY$ es cíclico.



Por otro lado, $ZYX = ACY = \frac{A}{2}$.

$$ZHX = ZYX = \frac{A}{2} \text{ y } AHX = \frac{A}{2} \Rightarrow ZHX = AHX.$$

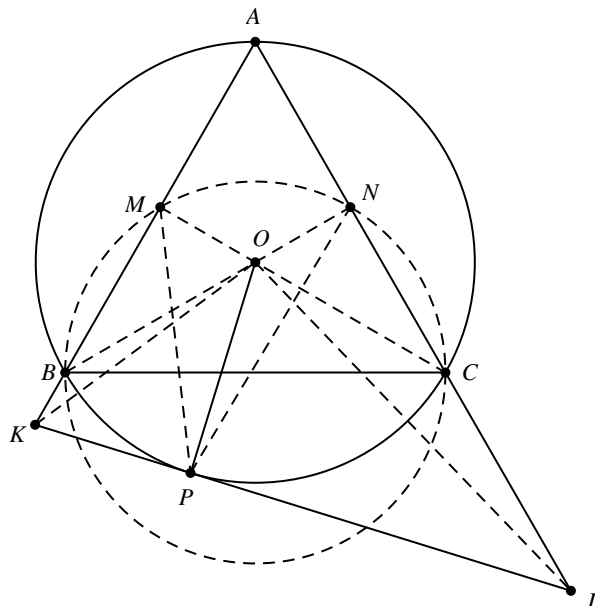
De modo que los puntos Z, A, H son colineales y por ende $AZ \perp BC$.

Problema 4.

Sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. Sabemos que el cuadrilátero $BMNC$ es cíclico. Además $BPC = 120^\circ > 90^\circ$, de modo que podemos afirmar que el punto P pertenece al interior de la circunferencia circunscrita del cuadrilátero $BMNC$. Luego $MPN > MBN = 30^\circ$. Por otra parte, los cuadriláteros $KMOP$ y $NOPL$ son cíclicos. Entonces

$$MKO = MPO \text{ y } NLO = NPO \Rightarrow AKO + ALO = MPN > 30^\circ,$$

$$\Rightarrow KOL = A + AKO + ALO > 90^\circ.$$



Problema 5.

a) No existen tales 5 circunferencias. Supongamos, por el contrario, que sí existe, luego sus centros son 5 puntos tales que cada punto está a la misma distancia de 3 de los otros puntos y tiene distancia distinta al punto restante. Trazamos una flecha de cada punto al punto que está a distancia distinta.

Lema 1. No hay dos puntos O_i, O_j tales que cada uno de ellos es el punto a distancia distinta del otro.

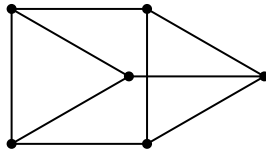
Demostración. Si tuviéramos esta situación entonces O_i y O_j tienen ambos igual distancia a los restantes puntos, luego ambos son el circuncentro de los restantes puntos, lo que es incorrecto.

Lema 2. No hay 4 puntos O_i, O_j, O_k, O_l tales que O_i, O_j tienen su flecha apuntando a O_k y O_k tiene su flecha apuntando a O_l .

Demostración. Nombramos O_m al punto restante, entonces las distancias desde O_i hasta O_j, O_l, O_m son iguales y las distancias desde O_j a O_i, O_l, O_m son iguales. Luego cada uno de O_l, O_m es el punto a distancia distinta de otro punto, lo que es incorrecto (según el lema 1).

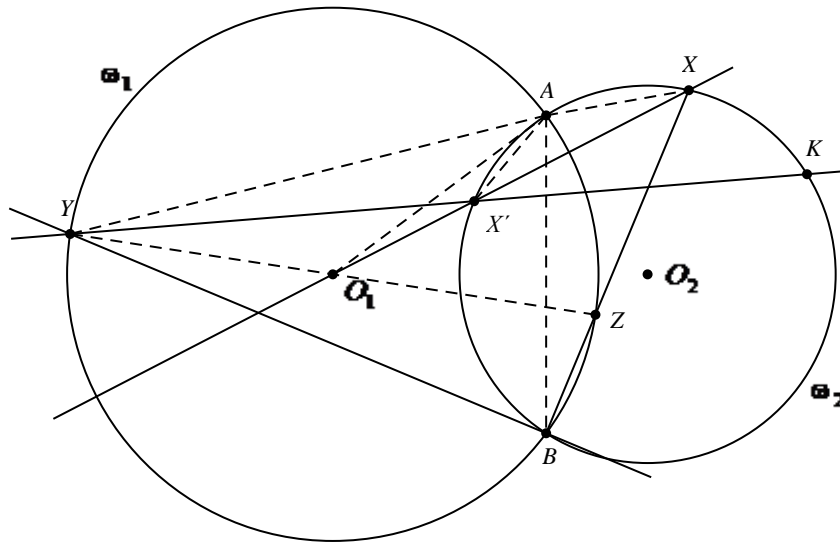
Entonces cada punto envía una flecha y recibe una flecha. Por el lema 1, no hay ciclos de 3 o 4 puntos. Luego solo tenemos un ciclo de 5 puntos. De modo que cada par de esos 5 puntos debe tener igual distancia, lo cual es imposible.

b) La siguiente figura muestra 6 puntos del plano tales que para cada punto existen exactamente otros 3 puntos en una circunferencia de radio 1.



Nivel Avanzado

Problema 1.



Sea Z el punto de intersección de BX y la circunferencia ω_1 . Sabemos que $YBZ = 90^\circ$, luego los puntos Y, O_1, Z están alineados.

$O_1YA = ABX = AX'X \Rightarrow YAX'O_1$ es cíclico. Luego $YAO_1 = YX'O_1 = XX'K$.

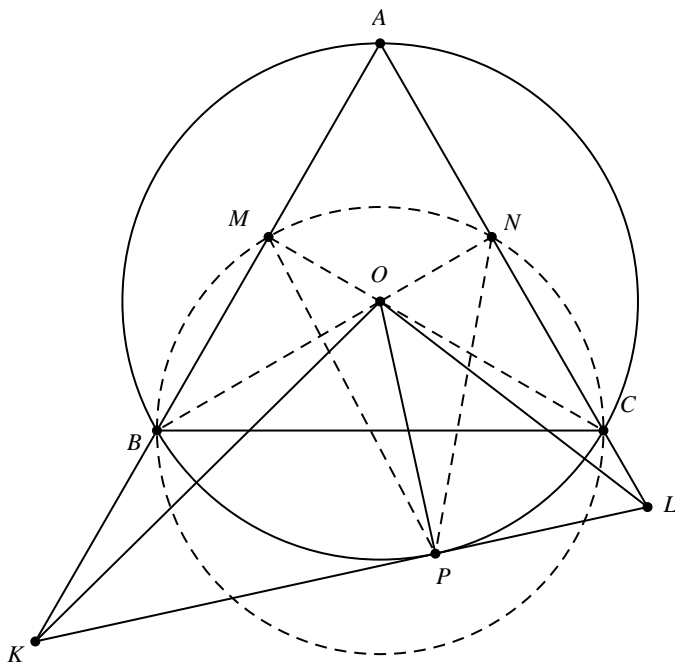
Por otra parte sabemos que $AO_1 = YO_1$, de modo que $O_1YA = YAO_1$. Por lo tanto $AX'X = XX'K$.
Entonces el punto X es el punto medio del arco AK .

Problema 2.

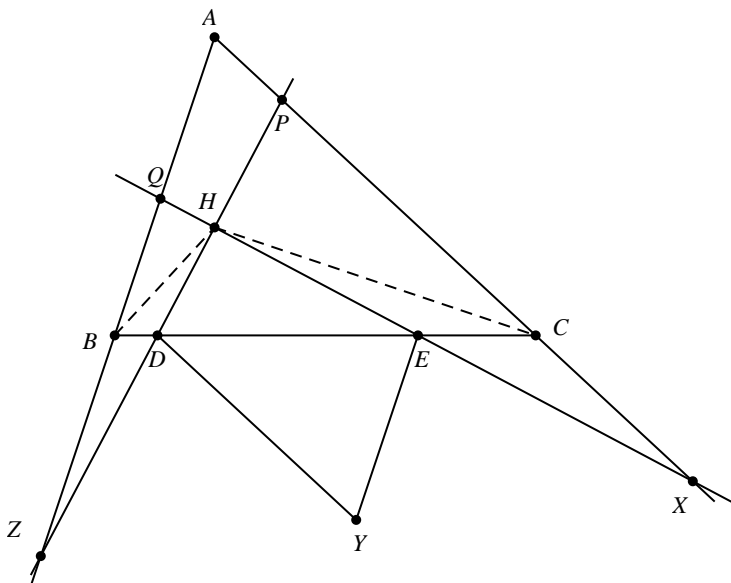
Sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. Sabemos que el cuadrilátero $BMNC$ es cíclico. Además $BPC = 120^\circ > 90^\circ$, de modo que podemos afirmar que el punto P pertenece al interior de la circunferencia circunscrita del cuadrilátero $BMNC$. Luego $MPN > MBN = 30^\circ$. Por otra parte, los cuadriláteros $KMOP$ y $NOPL$ son cíclicos. Entonces

$$MKO = MPO \text{ y } NLO = NPO \Rightarrow AKO + ALO = MPN > 30^\circ,$$

$$\Rightarrow KOL = A + AKO + ALO > 90^\circ.$$



Problema 3.



Sea P el punto de intersección de HZ y AC , y sea Q el punto de intersección de HX y AB . Por el teorema de Menelao en los triángulos AQX y APZ podemos afirmar que

$$\frac{CX}{AC} \cdot \frac{AB}{BQ} \cdot \frac{QE}{EX} = 1 \quad (1) \quad \text{y} \quad \frac{BZ}{AB} \cdot \frac{AC}{PC} \cdot \frac{PD}{DZ} = 1. \quad (2)$$

Por otro lado, H es el ortocentro del triángulo ABC . De modo que $BH \perp AC$ y sabemos que $DHE = 90^\circ$, luego $HXA = BHZ = \alpha$. De modo similar podemos decir que $HZA = CHX = \theta$.

Por la ley de los senos en los triángulos HPC , HXC y HPX :

$$\frac{\text{sen}(90^\circ - \theta)}{PC} = \frac{\text{sen}(HCP)}{HP}, \quad \frac{\text{sen}(\theta)}{CX} = \frac{\text{sen}(HCX)}{HX}, \quad \frac{HP}{HX} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(90^\circ - \alpha)} \Rightarrow \frac{PC}{CX} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\theta)}.$$

De modo similar, por la ley de los senos en los triángulos HBQ , HBZ y HQZ , podemos demostrar:

$$\frac{BZ}{BQ} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\theta)} \Rightarrow \frac{BZ}{BQ} = \frac{PC}{CX} \Rightarrow \frac{PC}{BZ} = \frac{CX}{BQ}. \quad (3)$$

Por las igualdades (1), (2) y (3) podemos decir que

$$\frac{XE}{EQ} = \frac{PD}{ZD}. \quad (4)$$

Supongamos que la recta que pasa por E y es paralela a AB corta a ZX en Y_1 y la recta que pasa por D y es paralela a AC corta a ZX en Y_2 . Por el teorema de Tales podemos decir:

$$\frac{Y_1X}{ZY_1} = \frac{XE}{EQ}, \quad \frac{Y_2X}{ZY_2} = \frac{PD}{ZD}.$$

Por la igualdad (4) mostramos que $Y_1 \equiv Y_2$, luego Y pertenece a ZX .

Problema 4.

Supongamos que el triángulo ABC no es isósceles. En tal caso, hay cuatro puntos (de los 12) en cada lado del triángulo ABC . Supongamos que estos 12 puntos pertenecen a dos circunferencias ω_1 y ω_2 .

Entonces cada una de las circunferencias ω_1 y ω_2 corta a cada lado del triángulo ABC en exactamente dos puntos (y cada una de las circunferencias ω_1 y ω_2 no pasa por A, B, C). Sabemos que hay una cantidad par de intersecciones de ω_1 y los lados del triángulo ABC . También hay una cantidad par de intersecciones de ω_2 y los lados del triángulo ABC . Pero entre esos 12 puntos, exactamente 3 pertenecen a los lados del triángulo ABC y 3 es impar. Entonces tenemos una contradicción. Luego el triángulo ABC es isósceles.

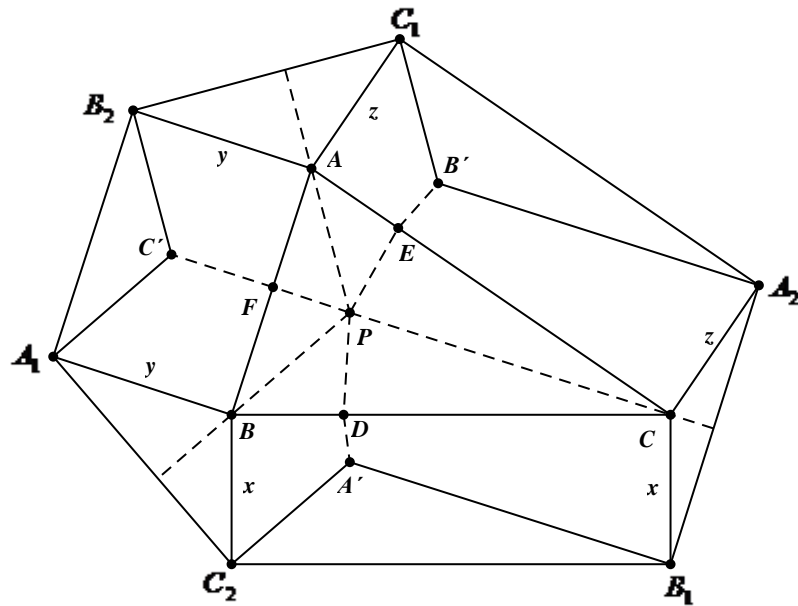
Problema 5.

Sea l_A la recta que pasa por A y perpendicular a B_2C_1 . Análogamente se definen l_B y l_C . Sean $CB_1 = BC_2 = x$, $BA_1 = AB_2 = y$, $AC_1 = CA_2 = z$. Por igualdad de ángulos podemos afirmar que:

$$\frac{\text{sen}(A_1)}{\text{sen}(A_2)} = \frac{y}{z}, \quad \frac{\text{sen}(B_1)}{\text{sen}(B_2)} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\text{sen}(C_1)}{\text{sen}(C_2)} = \frac{z}{x}.$$

Por el teorema de Ceva trigonométrico en el triángulo ABC , las rectas l_A, l_B, l_C son concurrentes. Sea

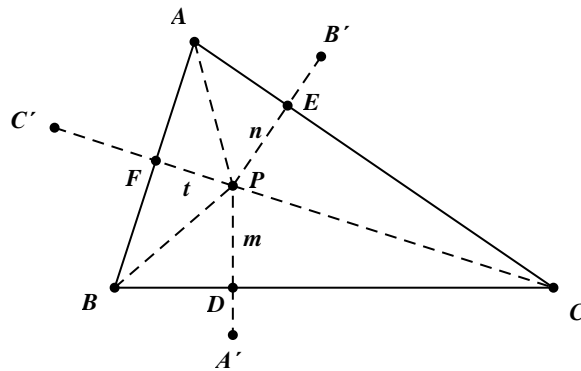
P el punto de intersección de l_A, l_B, l_C . Sabemos que los triángulos PBC y $A'C_2B_1$ son iguales (porque $BP \parallel A'C_2$, $CP \parallel A'B_1$, $BC \parallel B_1C_2$ y $BC = B_1C_2$). De modo que tenemos $PA' = x$, $PC' = y$, $PB' = z$, $PA' \perp BC$, $PB' \perp AC$, $PC' \perp AB$.



Supongamos que PA', PB', PC' cortan a BC, AC, AB en D, E, F respectivamente y $PD = m$, $PE = n$, $PF = t$. De acuerdo con la figura anterior tenemos:

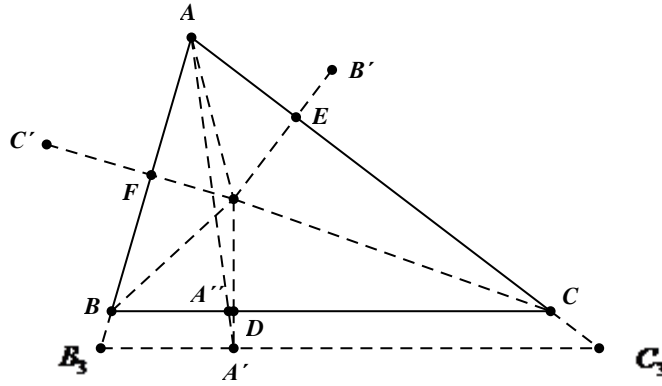
$$\frac{\text{sen}(A_1)}{\text{sen}(A_2)} = \frac{n}{t} = \frac{y}{z}, \quad \frac{\text{sen}(B_1)}{\text{sen}(B_2)} = \frac{t}{m} = \frac{x}{y}, \quad \frac{\text{sen}(C_1)}{\text{sen}(C_2)} = \frac{m}{n} = \frac{z}{x}.$$

Si $n = ky$ entonces $t = kz$, $m = \frac{kyz}{x}$.



Trazamos la recta por A' paralela a BC . La intersección de esta recta y las prolongaciones de AB y AC son B_3 y C_3 respectivamente. Sea A'' la intersección de AA' y BC . Por el teorema de Tales tenemos

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{B_3A'}{C_3A'}.$$



Sean $B_3PA' = \alpha$ y $C_3PA' = \theta$. Sabemos que los cuadriláteros PFB_3A' y PEC_3A' son cíclicos.

Luego $B_3FA' = \alpha$ y $C_3EA' = \theta$.

Por la ley de los senos en los triángulos PB_3A' , PC_3A' y PC_3B_3 :

$$\frac{B_3A'}{C_3A'} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\theta)}.$$

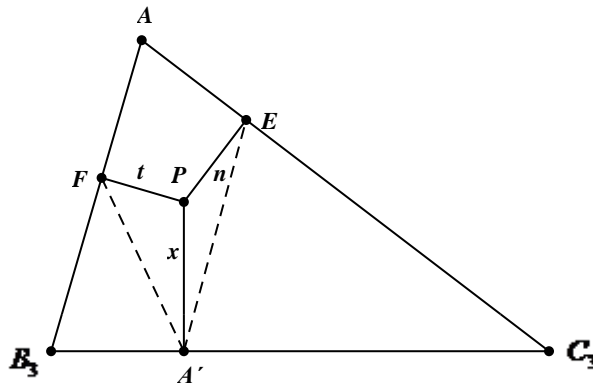
También por la ley de los senos, pero en el triángulo PFA' :

$$\frac{t}{x} = \frac{\sin(B + \alpha - 90^\circ)}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(B + \alpha)}{\cos(\alpha)} = \cos(B) - \tan(\alpha) \cdot \sin(B)$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\cos(B) - \frac{t}{x}}{\sin(B)}.$$

De modo similar podemos decir que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\cos(C) - \frac{n}{x}}{\sin(C)} \Rightarrow \frac{B_3A'}{C_3A'} = \frac{BA''}{CA''} = \frac{x \cos(B) - t}{x \cos(C) - n} \cdot \frac{\sin(C)}{\sin(B)}.$$



De manera similar se calculan otras dos fracciones. Por el teorema de Ceva en el triángulo ABC tenemos que:

$$\frac{x \cos(B) - t}{x \cos(C) - n} \cdot \frac{z \cos(C) - m}{z \cos(A) - t} \cdot \frac{y \cos(A) - n}{y \cos(B) - m} \cdot \frac{\sin(B)}{\sin(C)} \cdot \frac{\sin(C)}{\sin(A)} \cdot \frac{\sin(A)}{\sin(B)} = 1$$

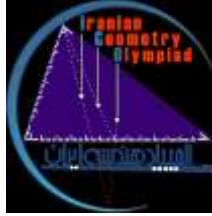
$$\Leftrightarrow \frac{x \cos(B) - t}{x \cos(C) - n} \cdot \frac{z \cos(C) - m}{z \cos(A) - t} \cdot \frac{y \cos(A) - n}{y \cos(B) - m} = 1.$$

Por otra parte sabemos que:

$$n = ky, \quad t = kz, \quad m = \frac{kyz}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cos(B) - kz}{x \cos(C) - ky} \cdot \frac{x \cos(C) - ky}{x \cos(A) - kx} \cdot \frac{x \cos(A) - kx}{x \cos(B) - kz} = 1.$$

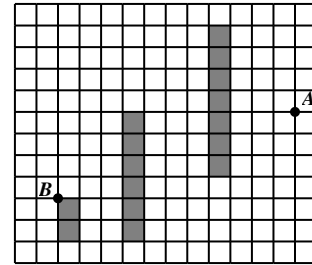
Luego AA', BB', CC' son concurrentes.



Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría

Nivel Elemental: alumnos de 7° y 8° grados

1. Alí quiere ir del punto A al punto B . Está prohibido pasar por el interior de las áreas grises, pero se puede pasar en cualquier dirección dentro de las áreas blancas (no solo por líneas de la cuadrícula pero por todo el plano). Tenés que ayudar a Alí a encontrar el camino más corto entre A y B . Solo hay que dibujar el camino y escribir su longitud (cada cuadrado tiene lado 1).



2. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC con $AC > AB$. Sean X un punto del lado AC e Y un punto de la circunferencia ω tal que $CX = CY = AB$. (Los puntos A e Y están en semiplanos distintos con respecto a la recta BC). La recta XY corta a ω por segunda vez en P . Demostrar que $PB = PC$.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo sin lados paralelos. Cada dos lados consecutivos del $ABCD$ se construye un paralelogramo usando esos dos lados consecutivos como lados del paralelogramo. Demostrar que entre los 4 nuevos puntos hay un solo punto en el interior del cuadrilátero $ABCD$.
ACLARACIÓN: Un cuadrilátero es convexo si no tiene entrecruzamientos y todos sus ángulos son menores de 180° .

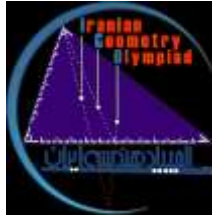
4. En un triángulo rectángulo ABC ($A = 90^\circ$), la mediatriz de BC corta a la recta AC en K y la mediatriz de BK corta a la recta AB en L . Si la recta CL es la bisectriz del ángulo C , hallar todos los posibles valores de los ángulos B y C .

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con las siguientes propiedades:

$$\angle ADC = 135^\circ \text{ y } \angle ADB - \angle ABD = 2\angle DAB = 4\angle CBD.$$

Si $BC = \sqrt{2}CD$, demostrar que $AB = BC + AD$.

*Tiempo: 3 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos*



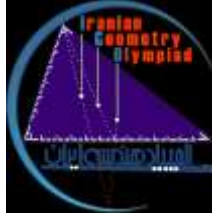
P

Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría

Nivel Medio: alumnos de 9º y 10º grados

1. En el trapecio $ABCD$ con $AB \parallel CD$, ω_1 y ω_2 son dos circunferencias de diámetros AD y BC respectivamente. Sean X e Y dos puntos arbitrarios en ω_1 y ω_2 respectivamente. Demostrar que la longitud del segmento XY es menor o igual que la mitad del perímetro de $ABCD$.
2. Dos circunferencias C_1 y C_2 se cortan en A y B . La tangente a C_1 trazada por A corta a C_2 en P y la recta PB corta a C_1 por segunda vez en Q (suponer que Q está afuera de C_2). La tangente a C_2 trazada por Q corta a C_1 y C_2 en C y D respectivamente. (Los puntos A y D están en distintos semiplanos con respecto a la recta PQ .) Demostrar que AD es bisectriz del ángulo CAP .
3. Hallar todos los enteros positivos N tales que existe un triángulo que se puede dividir en N cuadriláteros semejantes.
4. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC ($A = 90^\circ$). La tangente a ω trazada por A corta a la recta BC en P . Supongamos que M es el punto medio del (menor) arco AB , y PM corta a ω por segunda vez en Q . La tangente a ω trazada por Q corta a la recta AC en K . Demostrar que $\angle PKC = 90^\circ$.
5. Las circunferencias ω y ω' se cortan en A y B . La tangente a ω trazada por A corta a ω' en C y la tangente a ω' trazada por A corta a ω en D . Supongamos que la bisectriz interior de CAD corta a ω y ω' en E y F respectivamente, y la bisectriz exterior de CAD corta a ω y ω' en X e Y respectivamente. Demostrar que la mediatriz de XY es tangente a la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo BEF .

*Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos*



Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría

Nivel Avanzado: alumnos de 11° y 12° grados

1. Las circunferencias ω y ω' se cortan en A y B . La tangente a ω trazada por A corta a ω' en C y la tangente a ω' trazada por A corta a ω en D . Supongamos que el segmento CD corta a ω y ω' en E y F respectivamente (suponer que E está entre F y C). La perpendicular a AC trazada por E corta a ω' en P y la perpendicular a AD trazada por F corta a ω en el punto Q . (Los puntos A , P y Q están del mismo lado de la recta CD .) Demostrar que los puntos A , P y Q son colineales.
2. En el triángulo acutángulo ABC , la altura trazada desde A corta al lado BC en D , y M es el punto medio de AC . Supongamos que X es un punto tal que $AXB = DXM = 90^\circ$ (suponer que X y C están en semiplanos opuestos respecto de la recta BM). Demostrar que $XMB = 2MBC$.
3. Sea P el punto de intersección de los lados AD y BC del cuadrilátero convexo $ABCD$. Supongamos que I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos PAB y PDC respectivamente. Sea O el circuncentro del triángulo PAB y H el ortocentro del triángulo PDC . Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos AI_1B y DHC son tangentes entre sí si y solo si las circunferencias circunscritas de los triángulos AOB y DI_2C son tangentes entre sí.
4. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ las rectas AB y CD se cortan en E y las rectas AD y BC se cortan en F . Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD . Supongamos que ω_1 es una circunferencia que pasa por D y es tangente a AC en P . También supongamos que ω_2 es una circunferencia que pasa por C y es tangente a BD en P . Sea X el punto de intersección de ω_1 y AD , e Y el punto de intersección de ω_2 y BC . Supongamos que las circunferencias ω_1 y ω_2 se cortan por segunda vez en Q . Demostrar que la perpendicular trazada desde P a la recta EF pasa por el circuncentro del triángulo XQY .
5. ¿Existen seis puntos del plano $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ tales que todos los triángulos $X_i Y_j Z_k$ son semejantes para $1 \leq i, j, k \leq 2$?

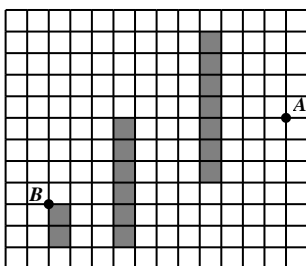
Tiempo: 4 horas y 30 minutos

Cada problema vale 8 puntos

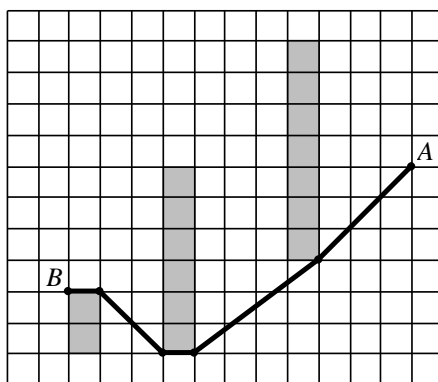
Soluciones IGO 2016

Nivel Elemental

1. Alí quiere ir del punto A al punto B . Está prohibido pasar por el interior de las áreas grises, pero se puede pasar en cualquier dirección dentro de las áreas blancas (no solo por líneas de la cuadrícula sino por todo el plano). Tenés que ayudar a Alí a encontrar el camino más corto entre A y B . Solo hay que dibujar el camino y escribir su longitud (cada cuadrado tiene lado 1).



Solución

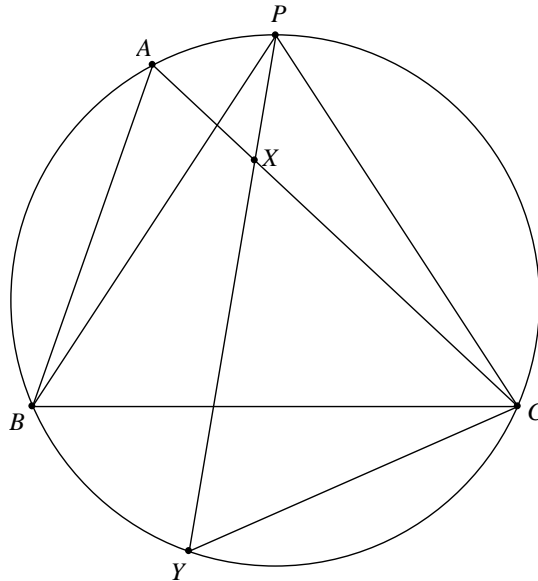


Por el teorema de Pitágoras la longitud del camino más corto es

$$\sqrt{3^2 + 3^2} + \sqrt{4^2 + 3^2} + 1 + \sqrt{2^2 + 2^2} + 1 = 3\sqrt{2} + 5 + 1 + 2\sqrt{2} + 1 = 7 + 5\sqrt{2}.$$

2. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC con $AC > AB$. Sean X un punto del lado AC e Y un punto de la circunferencia ω tal que $CX = CY = AB$. (Los puntos A e Y están en semiplanos distintos con respecto a la recta BC). La recta XY corta a ω por segunda vez en P . Demostrar que $PB = PC$.

Solución



Como el triángulo CXY es isósceles, $CXY = CYX = CYP$.

Por propiedad del ángulo exterior, $CXY = CPX + PCX = CPY + ACP$.

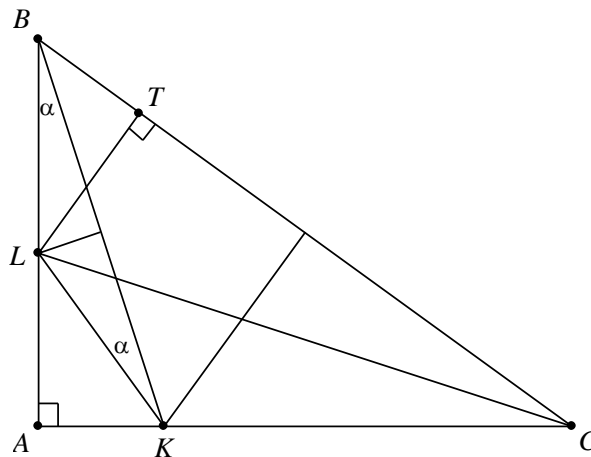
Por propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia con cuerdas iguales, $CYP = CBP$ y $CPY + ACP = ACB + ACP = BCP$.

Luego, en el triángulo BCP , $BCP = CBP$ y entonces el triángulo es isósceles, con $PB = PC$.

4. En un triángulo rectángulo ABC ($A = 90^\circ$), la mediatriz de BC corta a la recta AC en K y la mediatriz de BK corta a la recta AB en L . Si la recta CL es la bisectriz del ángulo C , hallar todos los posibles valores de los ángulos B y C .

Solución

Si $AB < AC$:



Sea $LBK = \alpha$. Como L pertenece a la mediatriz de BK tenemos que $LKB = \alpha$. Por ángulo exterior del triángulo BKL , $ALK = 2\alpha$ y entonces $LKA = 90^\circ - 2\alpha$.

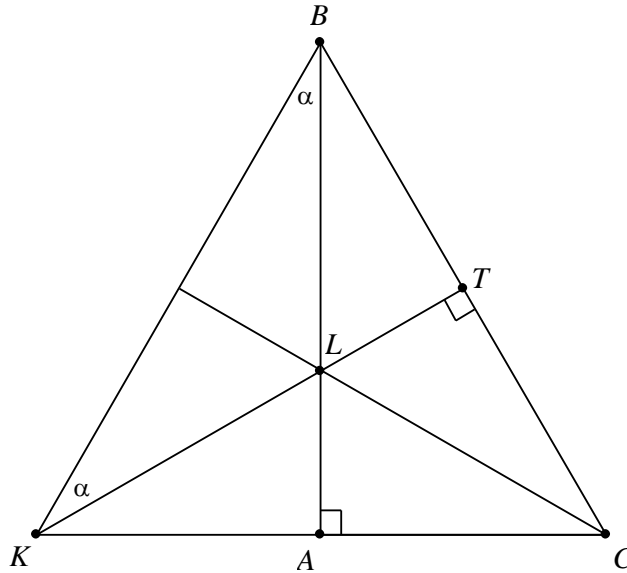
Como K pertenece a la mediatriz de BC , $BK = CK$, luego $KBC = KCB$ y dado que $BKA = KBC + KCB$,

$$KBC = KCB = \frac{1}{2}BKA = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Sea T el pie de la perpendicular por L a BC . Como CL es la bisectriz de C , $LT = LA$. Teníamos, además, que $BL = KL$, luego los triángulos rectángulos BTL y KAL son iguales. Por lo tanto

$$LBT = LKA, \text{ de donde } \alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - 2\alpha \text{ y } \alpha = 18^\circ. \text{ Entonces } B = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 54^\circ \text{ y } C = 36^\circ.$$

Si $AB > AC$:



Como antes, $LBK = LKB = \alpha$ y $KLA = 2\alpha$, $LKA = 90^\circ - 2\alpha$.

Sea T en BC tal que $LT \perp BC$.

Como CL es la bisectriz de C , $LT = LA$; también $LB = LK$ por estar L en la mediatriz de BK . Luego los triángulos BTL y KAL son iguales y tenemos $LBT = LKA = 90^\circ - 2\alpha$.

Entonces $CBK = BKC = 90^\circ - \alpha$ y $BC = CK$. También, como K pertenece a la mediatriz de BC , $BK = CK$. Luego BKC es equilátero y tenemos $90^\circ - \alpha = 60^\circ$, de modo que $\alpha = 30^\circ$ y $B = 90^\circ - 2\alpha = 30^\circ$ y $C = 60^\circ$.

Si $AB = AC$:

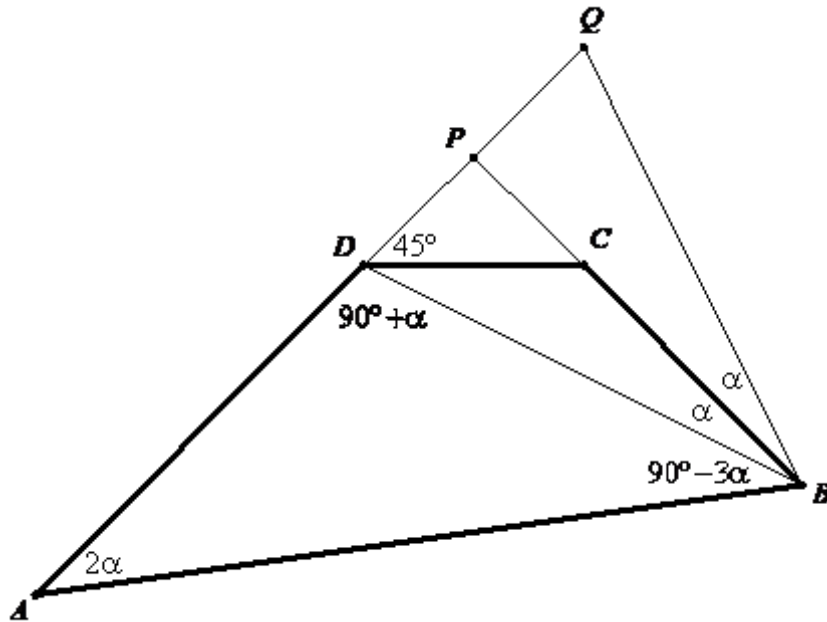
En este caso K coincide con A y L es el punto medio de AB . Sea T en BC tal que $LT \perp BC$. Entonces CL es la bisectriz de C , luego $LT = LA = LB$, y esto es imposible.

5, Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con las siguientes propiedades:

$$ADC = 135^\circ \text{ y } ADB - ABD = 2DAB = 4CBD.$$

Si $BC = \sqrt{2}CD$, demostrar que $AB = BC + AD$.

Solución



Sea $CBD = \alpha$, entonces $DAB = 2\alpha$, $ADB - ABD = 4\alpha$, y en el triángulo ABD ,
 $ADB + ABD = 180^\circ - 2\alpha$. Sumando y restando las últimas dos igualdades resulta $ADB = 90^\circ + \alpha$ y
 $ABD = 90^\circ - 3\alpha$.

Luego $DAB + CBA = 90^\circ$.

Sea P el punto de intersección de las rectas AD y BC . Por lo anterior, $APB = 90^\circ$. Por hipótesis,
 $PDC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, por lo tanto

$$PD = \frac{\sqrt{2}}{2} CD = \frac{BC}{2}.$$

Sea Q el simétrico de D respecto de P , entonces $QD = 2PD = BC$.

Por la simetría, los triángulos DPB y QPB son iguales, entonces $CBD = CBQ = \alpha$, luego

$ABQ = ABD + QBC = 90^\circ - 3\alpha + 2\alpha = 90^\circ - \alpha$. Además $AQB = 90^\circ - \alpha$ pues el ángulo en P es recto.
Luego, el triángulo ABQ es isósceles, de modo que

$$AB = AQ = DQ + AD = 2PD + AD = BC + AD.$$

La solución está completa.

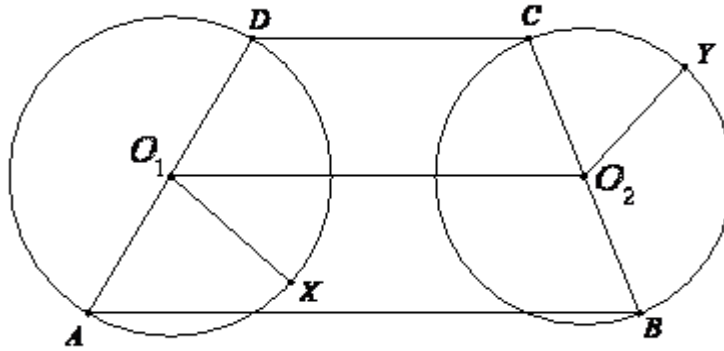
Nivel Medio

1. En el trapecio $ABCD$ con $AB \parallel CD$, ω_1 y ω_2 son dos circunferencias de diámetros AD y BC respectivamente. Sean X e Y dos puntos arbitrarios en ω_1 y ω_2 respectivamente.

Demostrar que la longitud del segmento XY es menor o igual que la mitad del perímetro de $ABCD$.

Solución

Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias ω_1 y ω_2 respectivamente, entonces O_1 y O_2 son los puntos medios de AD y BC respectivamente.



Luego $XO_1 = \frac{AD}{2}$, $YO_2 = \frac{BC}{2}$, $O_1O_2 = \frac{AB+CD}{2}$ (base media del trapecio). Entonces

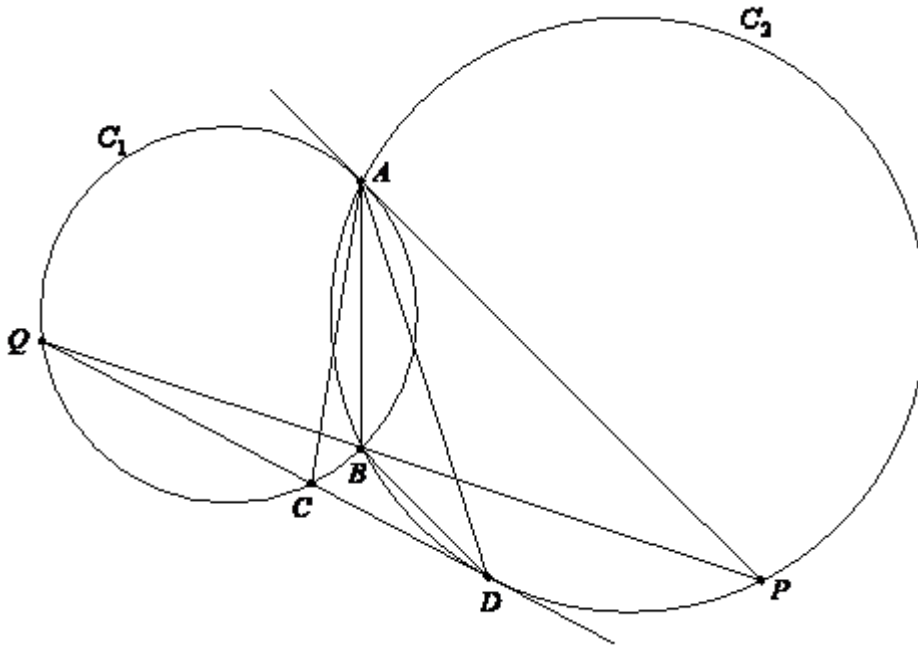
$$XY \leq XO_1 + O_1O_2 + O_2Y \leq \frac{AD}{2} + \frac{AB+CD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB+BC+CD+DA}{2},$$

como queríamos.

2. Dos circunferencias C_1 y C_2 se cortan en A y B . La tangente a C_1 trazada por A corta a C_2 en P y la recta PB corta a C_1 por segunda vez en Q (suponer que Q está afuera de C_2). La tangente a C_2 trazada por Q corta a C_1 y C_2 en C y D respectivamente. (Los puntos A y D están en distintos semiplanos con respecto a la recta PQ .)

Demostrar que AD es bisectriz del ángulo CAP .

Solución



Por ángulos inscritos en C_1 sobre la misma cuerda, $CAB = CQB$.

También, en C_2 , $DAB = BDQ$ por propiedad del ángulo seminscritos.

Entonces

$$CAD = CAB + DAB = CQB + BDQ = DQB + BDQ = PBD,$$

por la propiedad del ángulo exterior. Pero $PBD = PAD$, nuevamente por ser inscritos con el mismo arco en C_2 . Así, $CAD = PAD$ y resulta que AD es la bisectriz de CAP , como queríamos.

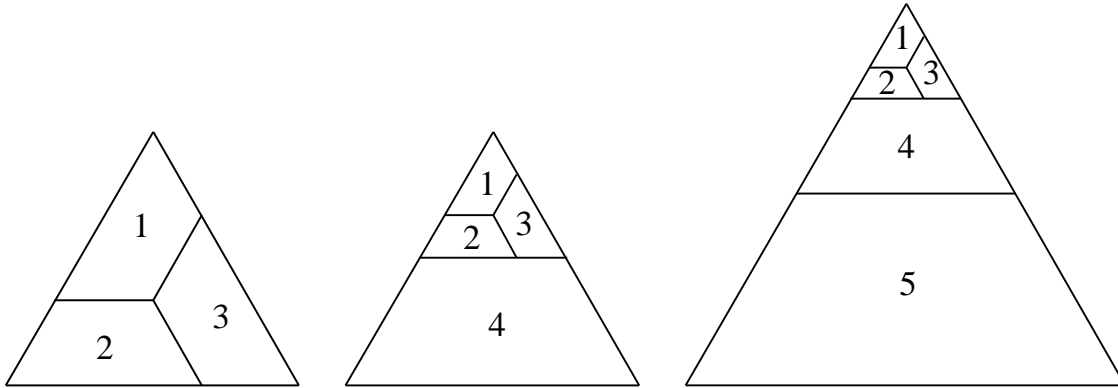
3. Hallar todos los enteros positivos N tales que existe un triángulo que se puede dividir en N cuadriláteros semejantes.

Solución

Para $N = 1$ es imposible.

También es imposible para $N = 2$ pues uno será cóncavo y el otro convexo.

Para $N \geq 3$ podemos hacer divisiones del siguiente tipo en un triángulo equilátero:



4. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC ($A = 90^\circ$). La tangente a ω trazada por A corta a la recta BC en P .

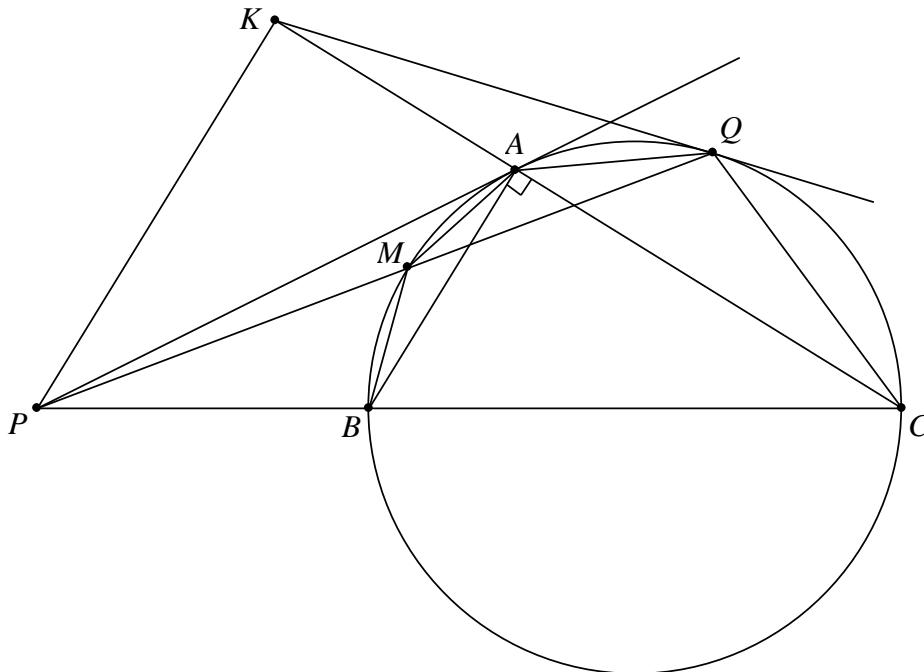
Supongamos que M es el punto medio del (menor) arco AB , y PM corta a ω por segunda vez en Q .

La tangente a ω trazada por Q corta a la recta AC en K . Demostrar que $PKC = 90^\circ$.

Solución

Haremos el caso $AB < AC$, el caso $AB > AC$ es análogo.

Usaremos repetidas veces que si trazamos por P una tangente a la circunferencia en X y una secante en Y y Z , con Y entre P y Z , entonces los triángulos PXY y PZX son semejantes. También, si trazamos desde P dos secantes a la circunferencia, con P, X, Y en una recta y P, W, Z en la otra, en ese orden, entonces los triángulos PXW y PZY son semejantes.



Como $BAC = 90^\circ$, es suficiente demostrar que $PK \parallel BA$.

Por lo enunciado al comienzo, los triángulos PAQ y PMA son semejantes, entonces $\frac{AQ}{MA} = \frac{PQ}{PA}$; el triángulo PBM es semejante al PQC , luego $\frac{BM}{QC} = \frac{PB}{PQ}$; los triángulos PBA y PAC son semejantes, de modo que $\frac{PB}{PA} = \frac{BA}{AC}$.

Sabemos que $BM = MA$ entonces de acuerdo con las tres relaciones de arriba podemos afirmar que

$$\frac{AQ}{MA} \cdot \frac{BM}{QC} = \frac{PQ}{PA} \cdot \frac{PB}{PQ},$$

$$\frac{AQ}{QC} = \frac{PB}{PA} = \frac{BA}{AC}. \quad (1)$$

Los triángulos KAQ y KQC son semejantes, de modo que $\frac{KA}{KQ} = \frac{KQ}{KC} = \frac{AQ}{QC}$. Multiplicando las dos primeras y elevando la tercera al cuadrado obtenemos

$$\frac{KA}{KQ} \cdot \frac{KQ}{KC} = \left(\frac{AQ}{QC}\right)^2,$$

$$\frac{KA}{KC} = \left(\frac{AQ}{QC}\right)^2. \quad (2)$$

Los triángulos PBA y PAC son semejantes, luego $\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC} = \frac{BA}{AC}$, de modo que, como antes,

$$\frac{PB}{PC} = \left(\frac{BA}{AC}\right)^2. \quad (3)$$

De (1), (2) y (3)

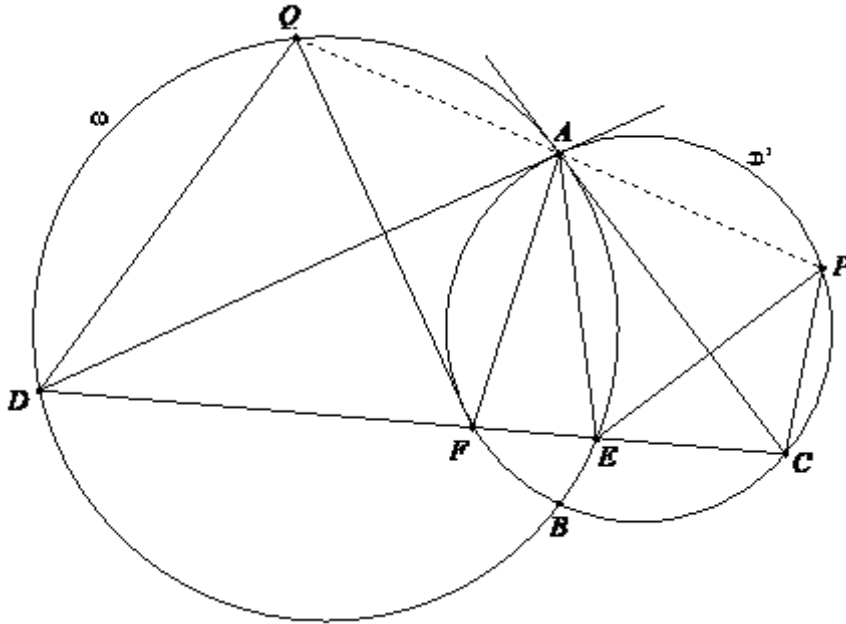
$$\frac{KA}{KC} = \frac{PB}{PC}.$$

Por el teorema de Tales, $PK \parallel BA$, como queríamos demostrar.

Nivel Avanzado

1. Las circunferencias ω y ω' se cortan en A y B . La tangente a ω trazada por A corta a ω' en C y la tangente a ω' trazada por A corta a ω en D . Supongamos que el segmento CD corta a ω y ω' en E y F respectivamente (suponer que E está entre F y C). La perpendicular a AC trazada por E corta a ω' en P y la perpendicular a AD trazada por F corta a ω en el punto Q . (Los puntos A , P y Q están del mismo lado de la recta CD .) Demostrar que los puntos A , P y Q son colineales.

Solución



En ω' el ángulo inscrito AFC es igual al semitangente que forman AC y la tangente AD ; en ω el ángulo inscrito AED es igual al semitangente que forman AD y la tangente AC . En consecuencia,

$$AFC = AED = 180^\circ - CAD.$$

En ω tenemos que $AED + AQD = 180^\circ$, por opuestos en el cuadrilátero cíclico $AQDE$, luego $AEF = 180^\circ - AQD$. Por lo tanto $AFD = AQD$. Entonces Q y F son simétricos respecto de AD , pues $FQ \perp AD$ y $AFD = AQD$.

De modo completamente análogo se demuestra que P y E son simétricos respecto de AC .

Entonces $DAQ = DAF$ y como éste es semitangente en ω' , $DAF = ACF$ pues ACF está inscrito en ω' . Análogamente obtenemos que

$$CAP = CAE = ADE.$$

Luego

$$DAQ + CAD + CAP = ACF + CAD + ADE = ACD + CAD + ADC = 180^\circ,$$

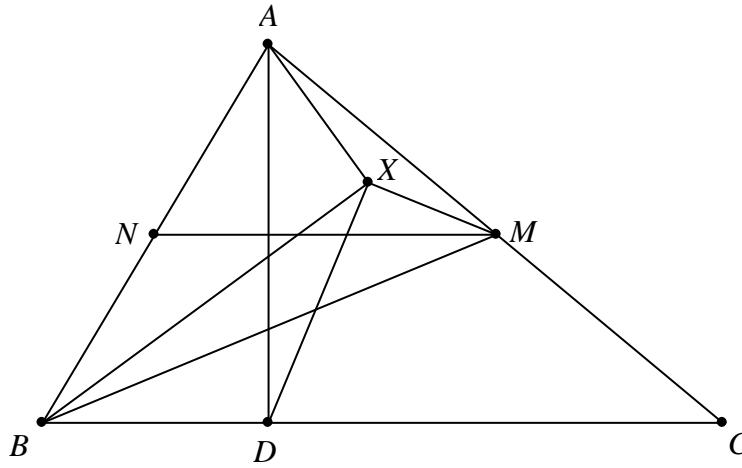
de modo que los puntos A, P, Q son colineales, como queríamos ver.

2. En el triángulo acutángulo ABC , la altura trazada desde A corta al lado BC en D , y M es el punto medio de AC .

Supongamos que X es un punto tal que $AXB = DXM = 90^\circ$ (suponer que X y C están en semiplanos opuestos respecto de la recta BM).

Demostrar que $XMB = 2MBC$.

Solución



Sea N el punto medio del lado AB , luego $MN \parallel BC$, por ser MN base media, y $\angle MBC = \angle NMB$ (alternos internos entre paralelas). Entonces basta demostrar que MN es la bisectriz del ángulo XMB .

Como $\angle AXB = 90^\circ$ y $\angle ADB = 90^\circ$ tenemos que el cuadrilátero $AXDB$ es cíclico y el centro de la circunferencia que lo circunscribe es N .

Ahora, $\angle BXD = \angle BAD = 90^\circ - \angle ABC$, entonces

$$\begin{aligned} \angle BXM &= \angle BXD + \angle DXM = 90^\circ - \angle ABC + 90^\circ = \\ &= 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle ANM = \angle BNM. \end{aligned}$$

De esta última igualdad se deduce que el cuadrilátero $BNXM$ es cíclico. Por otro lado, como N es el centro de la circunferencia por A, X, D, B , $NX = NB$. Entonces, en la circunferencia por B, N, X, M tenemos $\angle XMN = \angle BMN$ pues subtienen cuerdas iguales, y resulta que MN es bisectriz de $\angle XMB$, como queríamos demostrar.

3. Sea P el punto de intersección de los lados AD y BC del cuadrilátero convexo $ABCD$. Supongamos que I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos PAB y PDC respectivamente. Sea O el circuncentro del triángulo PAB y H el ortocentro del triángulo PDC .

Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos AI_1B y DHC son tangentes entre sí si y solo si las circunferencias circunscritas de los triángulos AOB y DI_2C son tangentes entre sí.

Solución

donde la última igualdad es por suma de ángulos interiores en el cuadrilátero $PAKB$. Pero

$$\begin{aligned} P + AKB &= 180^\circ - AI_1B + P = \frac{1}{2}(PAB + PBA) + P = \\ &= 90^\circ - \frac{P}{2} + P = 90^\circ + \frac{P}{2} = CI_2D, \end{aligned}$$

por ser I_2 el incentro del triángulo PCD . Por lo tanto, el cuadrilátero $CDQI_2$ es cíclico.

Tenemos que probar que las circunferencias circunscritas a los triángulos AOB y DI_2C son tangentes en Q . Para ello es suficiente demostrar que $ABQ + DCQ = AQB$.

Sabemos que las circunferencias circunscritas a los triángulos AI_1B y DHC son tangentes en K , por lo tanto $ABK + KCD = AKD$. Luego

$$(ABQ + KBQ) + (DCQ - KCQ) = AKD.$$

Pero $KBQ = KCQ$ y $AKD = AQB$, por lo tanto

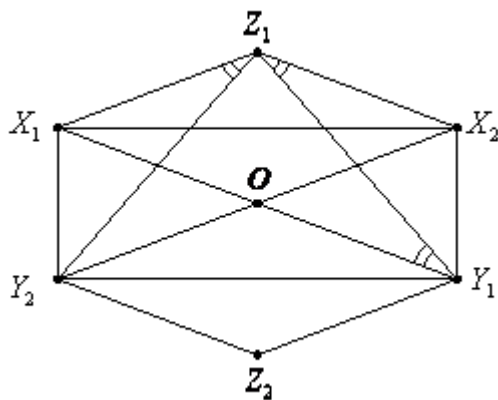
$$ABQ + DCQ = AQB.$$

Esto completa la demostración de la primera implicación. Para la segunda, seguimos exactamente el mismo procedimiento en sentido inverso.

5. ¿Existen seis puntos del plano $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ tales que todos los triángulos $X_iY_jZ_k$ son semejantes para $1 \leq i, j, k \leq 2$?

Solución

La respuesta es sí. Sea $X_1X_2Y_1Y_2$ un rectángulo de lados $X_1X_2 = 2a$ y $X_1Y_2 = 2b$. Sea O el punto de intersección de las diagonales X_1Y_1 y X_2Y_2 , y sean Z_1 y Z_2 los simétricos de O respecto de X_1X_2 e Y_1Y_2 respectivamente.



Por la simetría de la figura, es evidente que los cuatro triángulos

$$X_1Y_2Z_1, X_1Y_2Z_2, X_2Y_1Z_1, X_2Y_1Z_2$$

son congruentes. Lo mismo sucede con los triángulos

$$X_1Y_1Z_1, X_1Y_1Z_2, X_2Y_2Z_1, X_2Y_2Z_2.$$

Entonces, para que esta configuración de seis puntos cumpla la condición del enunciado alcanza con asegurarse de que $X_1Y_2Z_1$ y $X_1Y_1Z_1$ sean semejantes.

Observemos que $X_1Z_1Y_2 = X_2Z_1Y_1 = Z_1Y_1X_1$, donde la primera igualdad es por simetría y la segunda

porque $Z_1X_2 \parallel X_1Y_1$. Por lo tanto, si se cumple que $\frac{X_1Z_1}{Z_1Y_2} = \frac{Z_1Y_1}{Y_1X_1}$, los triángulos serán semejantes.

Podemos calcular estas longitudes usando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
 X_1Z_1 &= X_1O = \sqrt{a^2 + b^2} \\
 Z_1Y_2 &= Z_1Y_1 = \sqrt{a^2 + (3b)^2} = \sqrt{a^2 + 9b^2} \\
 Y_1X_1 &= \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}.
 \end{aligned}$$

Buscamos entonces que

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + 9b^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + 9b^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2}},$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 2(a^2 + b^2) &= a^2 + 9b^2, \\
 2a^2 + 2b^2 &= a^2 + 9b^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 &= 7b^2, \\
 \left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 7, \\
 \frac{a}{b} &= \sqrt{7}.
 \end{aligned}$$

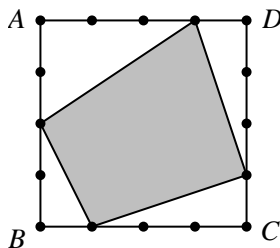
Por lo tanto, haciendo la construcción descrita comenzando con un rectángulo de lados $2a$ y $2b$ tales que $\frac{a}{b} = \sqrt{7}$ obtenemos seis puntos que cumplen lo que pide el enunciado.

IGO 2017

☞ **E1**

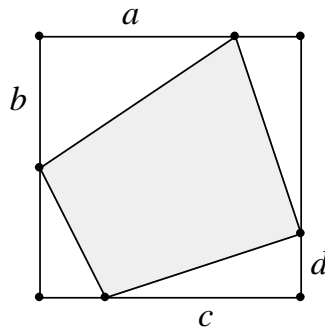
Cada lado de un cuadrado $ABCD$ de lados de longitud 4 se divide en cuatro partes iguales mediante tres puntos. Se elige uno de esos tres puntos en cada lado y se unen consecutivamente para obtener un cuadrilátero.

¿Qué números pueden ser el área de dicho cuadrilátero?



Solución

Denotamos a, b, c, d a las distancias de los vértices del cuadrilátero a los vértices del cuadrado, como se indica en la figura.



Entonces, el área del cuadrilátero sombreado es igual al área del cuadrado menos las áreas de los cuatro triángulos rectángulos que componen la parte no sombreada, es decir:

$$\begin{aligned}
 & 4 \cdot 4 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}(4-a)(4-d) - \frac{1}{2}(4-b)(4-c) = \\
 & = \frac{1}{2}(32 - ab - cd - 16 + 4a + 4b - ad - 16 + 4b + 4c - bc) = \\
 & = \frac{1}{2}(-(a+c)(b+d) + 4a + 4b + 4c + 4d) = \\
 & = -\frac{1}{2}(4-a-c)(4-b-d) + 8.
 \end{aligned}$$

Los valores posibles de a, b, c, d son 1, 2 y 3, de modo que $a+c$ y $b+d$ pueden valer

$$1 + 1 = 2, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 3 = 4, \quad 2 + 2 = 4, \quad 2 + 3 = 5 \quad \text{ó} \quad 3 + 3 = 6.$$

En tal caso, $4-a-c$ y $4-b-d$ pueden valer 2, 1, 0, 0, -1 ó -2.

Los posibles resultados de multiplicar dos de estos números son:

	2	1	0	-1	-2
2	4	2	0	-2	-4
1	2	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0	0
-1	-2	-1	0	1	2
-2	-4	-2	0	2	4

Eliminando las repeticiones tenemos

$$4, 2, 1, 0, -1, -2, -4.$$

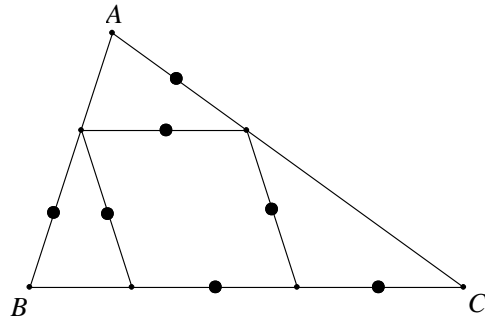
Los valores posibles del área del cuadrilátero son

$$-\frac{1}{2} \cdot 4 + 8 = \boxed{6}, \quad -\frac{1}{2} \cdot 2 + 8 = \boxed{7}, \quad -\frac{1}{2} \cdot 1 + 8 = \boxed{7,5}, \quad -\frac{1}{2} \cdot 0 + 8 = \boxed{8},$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (-1) + 8 = \boxed{8,5}, \quad -\frac{1}{2} \cdot (-2) + 8 = \boxed{9}, \quad -\frac{1}{2} \cdot (-4) + 8 = \boxed{10}.$$

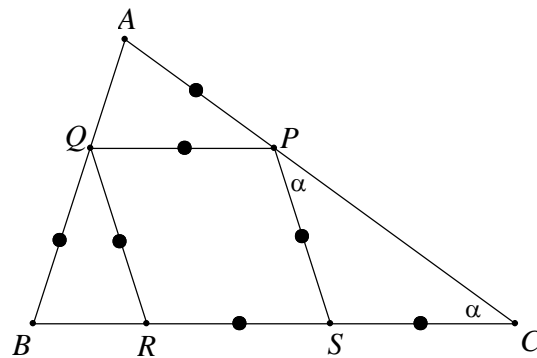
E2

Hallar los ángulos del triángulo ABC , sabiendo que los 7 segmentos señalados con un punto tienen la misma longitud.



Solución

Sean P, Q, R y S los vértices del rombo, como se ve en la figura.



Sea $\alpha = ACB$, entonces $CPS = \alpha$. Además $PSR = 2\alpha$ por ser ángulo exterior al triángulo CPS .

Como $PS \parallel QR$ resulta que $QRB = 2\alpha$.

El triángulo QBR es isósceles de modo que $QBR = QRB = 2\alpha$.

Por otra parte PQ es paralela a BC , y resulta $APQ = PCS = \alpha$. Entonces en el triángulo isósceles

$$APQ, PAQ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

La suma de los ángulos del triángulo ABC es

$$\alpha + 2\alpha + 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 180^\circ,$$

$$\frac{5}{2}\alpha = 90^\circ,$$

$$\alpha = 36^\circ.$$

Entonces $A = B = 72^\circ$ y $C = 36^\circ$.

☞ **E4**

Sean P_1, P_2, \dots, P_{100} cien puntos del plano entre los que no hay tres alineados. Para cada tres puntos, diremos que el triángulo que determinan es *en el sentido del reloj* si el orden creciente de sus vértices es en el sentido del reloj.

¿Puede ocurrir que la cantidad de triángulos en el sentido del reloj sea exactamente 2017?

Solución

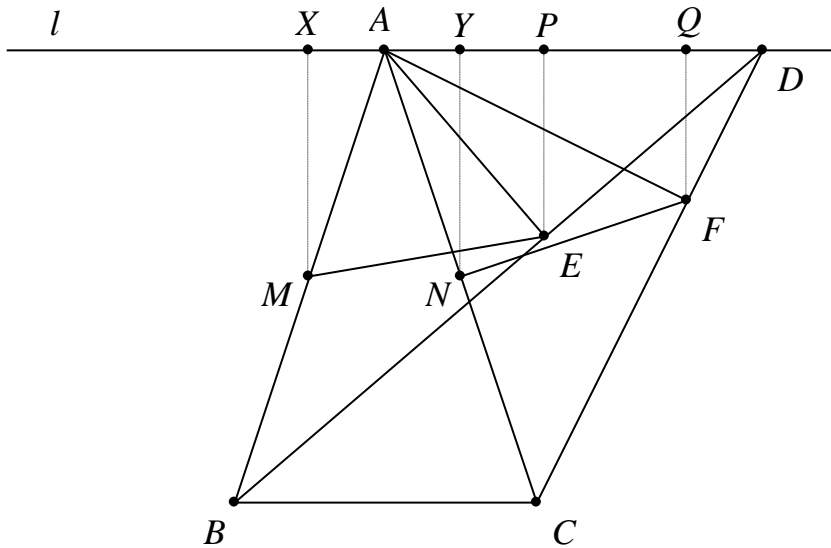
Veamos que es posible que la cantidad de triángulos en el sentido del reloj sea exactamente 2017. Supongamos que P_1, P_2, \dots, P_{100} están en una circunferencia en sentido antihorario. En este caso, la cantidad de triángulos en el sentido del reloj es cero. Ahora comenzamos a mover los puntos de a uno. Cuando un punto P_i cruza la recta $P_j P_k$ resulta que el triángulo $P_i P_j P_k$ cambia su sentido horario. Si además este movimiento se hace de forma que P_i cruce una sola recta por vez (es decir, no pasa por ninguna intersección de dos o más rectas determinadas por los otros 99 puntos del conjunto), entonces en cada cruce exactamente un triángulo cambia su sentido horario y los demás permanecen como estaban. Así, la cantidad de triángulos en el sentido del reloj aumenta o disminuye de a 1 por vez.

Continuamos moviendo los puntos de esta manera hasta que pasen a ubicarse nuevamente sobre una circunferencia pero esta vez en sentido horario. En esta situación todos los triángulos son en el sentido del reloj. La cantidad de estos triángulos es $\binom{100}{3} = 161700 > 2017$. Como dijimos que los puntos se movían de forma tal que la cantidad de triángulos en el sentido del reloj cambia de a 1 por vez, en algún momento de este proceso habrá exactamente 2017 de tales triángulos. Esto completa la demostración.

☞ **E5**

En el triángulo isósceles ABC , con $AB = AC$, sea l una recta paralela a BC trazada por A . Sea D un punto arbitrario de l . Sean E, F los pies de las perpendiculares a BD, CD trazadas por A , respectivamente. Si P, Q son los pies de las perpendiculares a l trazadas por E, F , demostrar que $AP + AQ \leq AB$.

Solución



Sin pérdida de generalidad, supongamos que $DC < DB$.

Sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. Tenemos que $\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ$, entonces, en los triángulos rectángulos AEB y AFC tenemos que $ME = \frac{AB}{2}$ y $NF = \frac{AC}{2}$ (por propiedad de la mediana correspondiente a la hipotenusa).

Sean X e Y los pies de las perpendiculares desde M y N a la recta l respectivamente. Los triángulos AMX y ANY son iguales, por lo tanto $AX = AY$. Luego, como

$$AX + AP = XP \leq ME = \frac{AB}{2},$$

$$AQ - AY = YQ \leq NF = \frac{AC}{2},$$

sumando estas desigualdades resulta que

$$AP + AQ \leq \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} = AB,$$

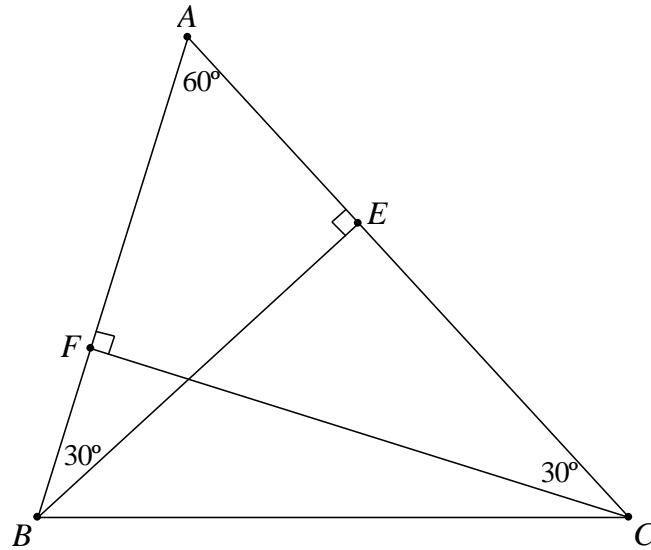
pues $AB = AC$.

☞ **M1**

Sea ABC un triángulo acutángulo con $A = 60^\circ$. Sean E, F los pies de las alturas desde B, C respectivamente.

Demostrar que $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

Solución



Como $BAC = 60^\circ$ tenemos que $ABE = ACF = 30^\circ$.

Luego los triángulos ABE y ACF son iguales a la mitad de un triángulo equilátero y

$$AE = \frac{1}{2} AB, \quad AF = \frac{1}{2} AC.$$

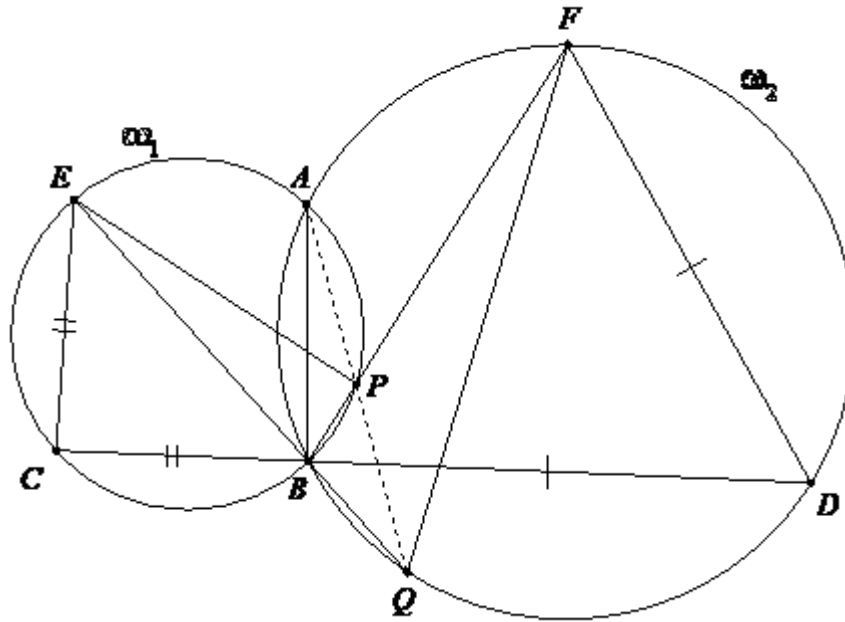
Por lo tanto

$$\begin{aligned} CE - BF &= (AC - AE) - (AB - AF) \\ &= AC - \frac{1}{2} AB - AB + \frac{1}{2} AC \\ &= \frac{3}{2}(AC - AB). \end{aligned}$$

☞ **M2**

Dos circunferencias ω_1, ω_2 se cortan en A, B . Una recta arbitraria trazada por B corta a ω_1, ω_2 en C, D respectivamente. Se eligen los puntos E, F en ω_1, ω_2 respectivamente de modo que $CE = CB$, $BD = DF$. Supongamos que BF corta a ω_1 en P y BE corta a ω_2 en Q . Demostrar que A, P, Q están alineados.

Solución



Supongamos que los puntos están como en la figura, los otros casos son análogos.

Como $BD = DF$ y C, E, P, B están en ω_1 vale que

$$BFD = DBF = 180^\circ - CBP = CEP.$$

Entonces

$$CEB + BEP = BFQ + QFD.$$

Además $CEB = CBE = QBD = QFD$ pues BCE es un triángulo isósceles y $BQDF$ es cíclico.

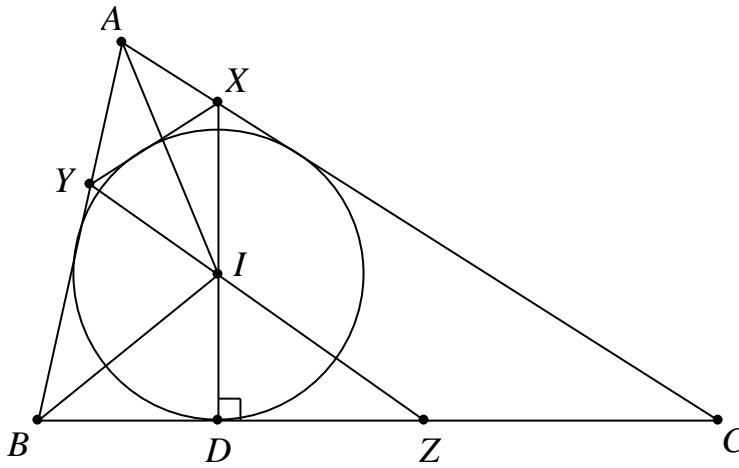
Se deduce que $BEP = BFQ$ y resulta $BAP = BEP = BFQ = BAQ$, por arco capaz en ω_1 y ω_2 .

Por lo tanto, A, P y Q son colineales, como queríamos demostrar.

☞ **A1**

En el triángulo ABC la circunferencia inscrita, de centro I , toca al lado BC en el punto D . La recta DI corta a AC en X . La recta tangente a la circunferencia inscrita, trazada por X (diferente de AC), corta a AB en Y . Si YI y BC se cortan en Z , demostrar que $AB = BZ$.

Solución



La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a las rectas AX , AY y XY , entonces es la circunferencia exinscrita al triángulo AXY y su centro I es intersección de las bisectrices de BAC , BYX y CXY . Luego

$$\begin{aligned} \widehat{XY} &= 180^\circ - (IYX + IXY) = 180^\circ - \frac{BYX + CXY}{2} = \\ &= 180^\circ - \frac{360^\circ - (AYX + AXY)}{2} = 180^\circ - \frac{360^\circ - (180^\circ - A)}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}. \end{aligned}$$

Por opuestos por el vértice, $\widehat{DIZ} = 90^\circ - \frac{A}{2}$, luego $BZI = \frac{A}{2} = BAI$.

Además en los triángulos ZBI y ABI tenemos que $ZBI = ABI$, y comparten el lado BI . Por lo tanto son iguales y resulta $AB = BZ$, como queríamos demostrar.