PRIMER NIVEL

XXXII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1
Se tiene un tablero rectangular de 2×13. En cada casilla de la fila inferior hay una ficha y las 13 fichas están numeradas de 1 a 13, de menor a mayor; la fila superior está vacía. La operación permitida es mover una ficha desde su lugar hacia una casilla vacía adyacente (con un lado común). El objetivo es que al cabo de varias operaciones permitidas las fichas queden ordenadas de mayor a menor, del 13 al 1, también en la fila inferior del tablero. Hacerlo con el número mínimo de operaciones permitidas. Justificar que el número hallado es mínimo.

Problema 2
Los puntos D y E dividen al lado AB del triángulo equilátero ABC en tres partes iguales; D está entre A y E. El punto F del lado BC es tal que $CF = AD$. Hallar el valor de la suma de los ángulos $C\widehat{D}F + C\widehat{E}F$.

Problema 3
Se tiene un tablero de 3×6666. En la primera fila están escritos los números enteros desde 1 hasta 6666, ordenados de menor a mayor. Hay que escribir en la segunda fila los números desde 1 hasta 6666 pero ordenados convenientemente sin repetir, y luego escribir en cada casilla de la tercera fila la suma de los dos números de su columna: el de la primera y el de la segunda fila. El objetivo es que los números de la tercera fila sean todos cuadrados perfectos (en esta fila puede haber repeticiones). Decidir si es posible lograr esta distribución. Si la respuesta es sí, describir la distribución; si es no, explicar porqué.

PRIMER NIVEL

XXXII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4

Se tiene un prisma regular cuyas bases son dos polígonos regulares de n lados. En cada vértice del prisma hay escrito + 1 o ï 1 de modo que en cada cara del prisma la multiplicación de los números de sus vértices es ï 1. Determinar todos los $n \geq 3$ para los que es posible esta situación.
ACLARACIÓN: El prisma tiene $n+2$ caras: n rectángulos y 2 polígonos de n lados cada uno (bases).

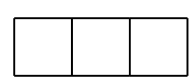
Problema 5

Diremos que un número natural es de tipo 1 si cada uno de sus dígitos en posición par es mayor o igual que cada uno de sus dígitos adyacentes, y diremos que un número natural es de tipo 2 si cada uno de sus dígitos en posición impar es mayor o igual que cada uno de sus dígitos adyacentes. Las posiciones se cuentan de izquierda a derecha; no se permiten ceros a la izquierda (el primer dígito no es cero). Los números de un dígito se consideran de tipo 1 y de tipo 2 simultáneamente. Decidir si es cierto que:

a) Cada número $a > 1$ de tipo 1 se puede representar como suma de dos números de tipo 2.
b) Cada número $a > 1$ de tipo 2 se puede representar como suma de dos números de tipo 1.

Problema 6

Bruno le dice a Facundo: ñHe conseguido colocar 1226 fichas de 1×3 como las de la figura en un cuadrado cuadriculado Q de modo que no tengan puntos en común, ni siquiera vértices.ò Sin saber las dimensiones de Q, Facundo le respondió: ñSi lo que decís es verdad entonces se pueden ubicar 1250 fichas de 1×3 en tu cuadrado, en las mismas condiciones.ò Determinar si es verdad lo que dice Facundo.



ACLARACIÓN: Cada ficha cubre exactamente 3 casillas del cuadrado Q. Las fichas se pueden girar.

SEGUNDO NIVEL

XXXII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1
Hallar todos los números naturales a tales que para todo natural n el número $n(a+n)$ no es un cuadrado perfecto.

Problema 2
El rectángulo *ABCD* tiene lados $AB=3$, $BC=2$. El punto *P* del lado *AB* es tal que la bisectriz de $C\widehat{D}P$ pasa por el punto medio de *BC*. Hallar la longitud del segmento *BP*.

Problema 3
Diremos que un número natural es *aceptable* si tiene como mucho 9 divisores primos distintos. Se tiene una pila de $100!=1\cdot 2\cdot ...\cdot 100$ piedras. Una movida legal es retirar *k* piedras de la pila, donde *k* es un número aceptable. Dos jugadores Lucas y Nicolás hacen, por turnos, movidas legales; Lucas comienza el juego. El que retira la última piedra, gana. Decidir cuál de los jugadores tiene estrategia ganadora y describir dicha estrategia.
ACLARACIÓN: $100!$ es la multiplicación de todos los números naturales desde 1 hasta 100.

SEGUNDO NIVEL

XXXII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4

Sea N el número de tiras ordenadas de 9 números (a,b,c,d,e,f,g,h,i) de enteros positivos tales que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}+\frac{1}{h}+\frac{1}{i}=1.$$

Decidir si N es par o impar. Justificar la respuesta.

Problema 5

Hallar todos los números naturales n que se pueden representar en la forma $n=[a,b]+[b,c]+[c,a]$ con a, b, c números naturales. Aquí $[u,v]$ denota el mínimo común múltiplo de u y v.

ACLARACIÓN: El mínimo común múltiplo de dos números naturales u y v es el menor número natural m tal que m es múltiplo de u y m es múltiplo de v.

Problema 6

Dados dos enteros positivos a y b, una movida permitida es elegir un divisor propio de uno de ellos y sumárselo a a o sumárselo a b. Dos jugadores, Agustín y Ian, hacen por turnos una movida permitida; Agustín juega primero. El que obtiene un número mayor o igual a 2015, gana.
Determinar quién gana si el juego comienza con:

a) $a=3,\ b=5$; b) $a=6,\ b=7$.

ACLARACIÓN: Aquí un divisor propio del número natural k significa un número natural d tal que d divide a k y $d\neq k$.

TERCER NIVEL

XXXII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1

Expresar la suma de 99 términos

$$\frac{1\cdot 4}{2\cdot 5}+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{k(3k+1)}{(3k-1)(3k+2)}+\ldots+\frac{99\cdot 298}{296\cdot 299}$$

como una fracción irreducible.

Problema 2

Hallar todos los pares de números naturales a, b, con $a\neq b$, tales que $a+b$ y $a\cdot b+1$ son potencias de 2.

Problema 3

Consideremos los puntos $O=(0,0)$, $A=(-2,0)$ y $B=(0,2)$ en el plano coordenado. Sean E y F los puntos medios de OA y OB respectivamente. Rotamos el triángulo OEF con centro O en sentido de las agujas del reloj hasta obtener el triángulo $OE'F'$ y, para cada posición rotada, sea $P=(x,y)$ la intersección de las rectas AE' y BF'. Hallar el máximo valor posible de la coordenada y de P.

TERCER NIVEL

XXXII OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4

Un segmento *S* de longitud 50 está cubierto por varios segmentos de longitud 1, todos ellos contenidos en *S*. Si se quitara cualquiera de estos segmentos unitarios, *S* ya no estaría completamente cubierto. Hallar el máximo número de segmentos unitarios con esta propiedad.
ACLARACIÓN: Suponer que los segmentos incluyen sus extremos.

Problema 5

Hallar todos los números primos *p* tales que $p^3 - 4p + 9$ es un cuadrado perfecto.

Problema 6

Sea *S* el conjunto de los números naturales desde 1 hasta 1001, $S = \{1, 2, ..., 1001\}$. Lisandro piensa un número *N* de *S*, y Carla tiene que averiguar ese número con el siguiente procedimiento. Ella le da a Lisandro una lista de subconjuntos de *S*, Lisandro la lee y le dice a Carla cuántos subconjuntos de su lista contienen a *N*. Si Carla lo desea, puede repetir lo mismo con una segunda lista, y luego con una tercera, pero no se permiten más de 3 listas.
¿Cuál es la menor cantidad total de subconjuntos que le permiten a Carla hallar *N* con certeza?