



XII Olimpiada Matemática Rioplatense

San Isidro – 11 de diciembre de 2003

Nivel 2 – Segundo Día

Versión en Español

- (4) En una suma hay 1669 fracciones y los denominadores recorren los enteros desde 1 hasta 1669. Si el denominador es múltiplo de 5, entonces el numerador es 4 y la fracción figura con signo $-$; si el denominador no es múltiplo de 5, entonces el numerador es 1 y la fracción figura con signo $+$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + \frac{1}{1661} + \frac{1}{1662} + \frac{1}{1663} + \frac{1}{1664} - \frac{4}{1665} + \frac{1}{1666} + \frac{1}{1667} + \frac{1}{1668} + \frac{1}{1669}.$$

Si la suma se escribe como fracción irreducible (simplificada), demuestre que el numerador de esta fracción es divisible por 2003.

- (5) El cuadrilátero $ABCD$ tiene sus diagonales perpendiculares y está inscrito en una circunferencia Γ de centro O . Una recta paralela a BD corta los segmentos AO y AD en P y Q , respectivamente. Demuestre que las rectas BP y CQ se cortan en un punto de Γ .
- (6) Sobre una mesa se tienen $n \geq 2$ bolsas de plástico, todas de diferente color. Cada una de ellas está en contacto con la mesa o está adentro de una de las otras bolsas. La operación permitida es elegir una de las bolsas que está en contacto con la mesa y realizar el siguiente intercambio, todas las bolsas que tenga adentro se ponen en contacto con la mesa, y todas las demás bolsas que están en contacto con la mesa se meten dentro de la bolsa elegida (sin modificar el contenido de ninguna de las bolsas que cambian de lugar). Determine cuántas configuraciones diferentes se pueden obtener utilizando repetidas veces esta operación.

Aclaración: Dos configuraciones se consideran la misma si cada bolsa contiene las mismas bolsas en una y otra configuración.

Duración: $3\frac{1}{2}$ horas