XXVIII TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. Se tienen un heptágono regular (7 lados) y un polígono regular de 17 lados. Se trazan la circunferencia inscripta y la circunferencia circunscripta del heptágono regular. Estas dos circunferencias definen una corona circular asociada al heptágono.
Análogamente, se trazan la circunferencia inscripta y la circunferencia circunscripta del polígono regular de 17 lados y estas dos circunferencias definen una corona circular asociada al polígono regular de 17 lados.
Si las dos coronas circulares tienen la misma área, demostrar que el lado del heptágono es igual al lado del polígono regular de 17 lados.
ACLARACIONES: La circunferencia inscripta en un polígono regular es tangente a cada lado del polígono en su punto medio. La circunferencia circunscripta de un polígono regular es la que pasa por todos sus vértices. Una corona circular es la porción del plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

3 PUNTOS

2. Cada vez que Ana va a una fiesta averigua para cada dos personas de la fiesta si se conocen o no. Para memorizar esta información, traza una circunferencia y representa a cada persona de la fiesta con una cuerda, de manera que cada vez que dos personas se conocen sus respectivas cuerdas se cortan y cada vez que dos personas no se conocen sus respectivas cuerdas no se cortan. Ana está segura de que no importa el tamaño de la fiesta ni cómo sea la distribución de conocidos y desconocidos siempre podrá representar la situación con su esquema. Determinar si Ana está o no en lo cierto.

ACLARACIÓN: Se considera que dos cuerdas con un extremo común se cortan.

5 PUNTOS

3. Un cuadrado mágico de 3×3 se ha completado con 9 números (desconocidos) *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, como en la figura, de manera que las sumas de los tres números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal sean iguales.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Demostrar que

a) $2(a+c+g+i)=b+d+f+h+4e$

3 PUNTOS

b) $2(a^3+c^3+g^3+i^3)=b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3$

3 PUNTOS

4. Se tiene un triángulo acutángulo y una circunferencia de radio R tangente a los tres lados del triángulo (la circunferencia inscripta del triángulo). Se trazan tres tangentes a la circunferencia de manera que estas tres tangentes dividan al triángulo original en tres triángulos rectángulos y un hexágono. Si el perímetro del hexágono es igual a Q, calcular la suma de los diámetros de las tres circunferencias inscriptas en los tres triángulos rectángulos de la subdivisión.
ACLARACIÓN: La circunferencia inscripta en un triángulo es tangente a cada lado del triángulo. Su centro es el punto de intersección de las bisectrices del triángulo.

6 PUNTOS

CONTINÚA AL DORSO

5. Consideramos un cuadrado de 1×1 pintado de rojo. Una hoja rectangular de papel de área 2 se llama *cubridora* si con la hoja, y sin cortarla, se puede cubrir completamente el cuadrado rojo. Es claro que si la hoja es un rectángulo de 2×1 es cubridora y si es un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ también es cubridora.
a) Demostrar que hay otras hojas cubridoras.

4 PUNTOS

b) Demostrar que hay infinitas hojas cubridoras.

3 PUNTOS

6. Sea $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$, donde $\frac{a_n}{b_n}$ es una fracción irreducible (simplificada). Demostrar que existen infinitos enteros positivos *n* tales que $b_{n+1}<b_n$.

8 PUNTOS

7. El animador tiene un mazo de 52 naipes. Los espectadores deben averiguar el orden de los naipes en el mazo (sin especificar si es de arriba hacia abajo o viceversa). Para ello pueden hacer preguntas del tipo “¿cuántos naipes hay entre tal naipe y tal otro?”. Una espectadora ha espiado el orden (lo conoce completamente) y será la que formule las preguntas al animador. El animador dará las respuestas, siempre verdaderas, y los demás espectadores deberán decir cuál es el orden, con certeza absoluta. Determinar el número mínimo de preguntas que debe hacer la espía para asegurar el éxito de sus compañeros.

9 PUNTOS

XXVIII TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
OTOÑO DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Cada vez que Ana va a una fiesta averigua para cada dos personas de la fiesta si se conocen o no. Para memorizar esta información, traza una circunferencia y representa a cada persona de la fiesta con una cuerda, de manera que cada vez que dos personas se conocen sus respectivas cuerdas se cortan y cada vez que dos personas no se conocen sus respectivas cuerdas no se cortan. Ana está segura de que no importa el tamaño de la fiesta ni cómo sea la distribución de conocidos y desconocidos siempre podrá representar la situación con su esquema. Determinar si Ana está o no en lo cierto.

ACLARACIÓN: Se considera que dos cuerdas con un extremo común se cortan.

4 PUNTOS

2. Dado un triángulo acutángulo ABC, sean E, F y G en los lados BC, AC y AB, respectivamente, tales que EA, FB y GC son bisectrices del triángulo EFG. Demostrar que AE, BF y CG son las alturas del triángulo ABC.

6 PUNTOS

3. Sea $a = 0{,}12457...$ el número que se obtiene de la siguiente manera: el dígito en la posición n después de la coma es igual al último dígito antes de la coma del desarrollo decimal del número $n\sqrt{2}$. Demostrar que a es un número irracional.

6 PUNTOS

4. Determinar si es verdad que todo prisma se puede dividir en un cierto número de pirámides de manera tal que cada pirámide tenga su base contenida en una base del prisma y su vértice en la otra base del prisma.

6 PUNTOS

CONTINÚA AL DORSO

5. Sea $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n}$, donde $\frac{a_n}{b_n}$ es una fracción irreducible (simplificada). Demostrar que existen infinitos enteros positivos n tales que $b_{n+1}<b_n$.

7 PUNTOS

6. Diremos que los naipes de un mazo de 52 naipes están en un orden regular si cada dos naipes consecutivos del mazo, o son del mismo número o son del mismo palo, y también el naipe de arriba y el de abajo del mazo son del mismo palo o del mismo número. Además, el naipe de arriba del mazo es el as de espadas.

a) Demostrar que la cantidad de maneras de ordenar el mazo en un orden regular es divisible por 12!, donde $12!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12$.

3 PUNTOS

b) Demostrar que la cantidad de maneras de ordenar el mazo en un orden regular es divisible por 13!, donde $13!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13$

5 PUNTOS

7. Sean $x_1,...,x_k$ números positivos tales que $x_1^2+...+x_k^2<\frac{x_1+...+x_k}{2}$ y $x_1+...+x_k<\frac{x_1^3+...+x_k^3}{2}$.

a) Demostrar que $k>50$.

3 PUNTOS

b) Dar un ejemplo de tales números para algún valor de k.

3 PUNTOS

c) Hallar el mínimo k para el que existe un tal ejemplo.

3 PUNTOS