XXIV TORNEO DE LAS CIUDADES (PRIMAVERA DEL HEMISFERIO NORTE)
NIVEL JUVENIL

1. Gabriel elige tres enteros positivos *a*, *b*, *c*, y escribe la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. A continuación Cintia puede cambiar uno, dos o ninguno de los signos más por signos menos. Si la dos soluciones de la ecuación (modificada por Cintia) son números enteros, gana Gabriel, mientras que si la ecuación no tiene soluciones o tiene, pero alguna de ellas no es entera, gana Cintia. Determinar si Gabriel puede elegir los coeficientes *a*, *b*, *c* para asegurarse la victoria, no importa qué signos decida cambiar Cintia.

4 PUNTOS

2. Sea *ABC* un triángulo y denotamos *R* al radio de la circunferencia circunscripta, *r* al radio de la circunferencia inscripta, *a* la longitud del lado mayor y *h* la menor de las alturas.

Demostrar que $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$.

ACLARACIÓN: La *circunferencia circunscripta* de un triángulo es la que pasa por los tres vértices del triángulo. La *circunferencia inscripta* de un triángulo es la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo.

4 PUNTOS

3. En un torneo de fútbol de 15 equipos, cada uno juega un partido contra cada uno de los restantes.

a) Demostrar que en el torneo hay por lo menos un partido tal que la suma de la cantidad de partidos que jugó cada uno de los dos rivales antes de ese partido es impar.

4 PUNTOS

b) Decidir si es posible que haya exactamente un solo partido con las propiedades del inciso anterior.

3 PUNTOS

4. Un chocolate tiene forma de triángulo equilátero de lado *n*, dividido por rectas en pequeños triángulos equiláteros de lado 1 (cada lado del chocolate se dividió en *n* segmentos iguales, y las líneas de la subdivisión de cada par de lados se unieron con rectas paralelas al tercer lado del chocolate). Dos personas juegan el siguiente juego. En cada movida, el jugador que tiene el turno debe cortar un pedazo de chocolate con forma de triángulo equilátero, siguiendo una sola línea de la subdivisión, comerse ese triángulo y pasar el resto del chocolate al otro jugador. El jugador que come el último pedazo, un triangulito de lado 1, es el ganador. Un jugador también gana si su oponente no puede realizar la movida correspondiente.

Para cada *n*, determinar cuál de los dos jugadores (el que comienza o el segundo) puede jugar de modo de asegurarse la victoria, no importa lo bien que juegue su oponente.

7 PUNTOS

5. Se tiene un tablero de 9×9, dividido en casillas de 1×1. En algunas casillas de 1×1 se hacen dos cortes, uno a lo largo de cada diagonal. Determinar el máximo número de casillas al que se le puede hacer estos cortes sin que el tablero se divida en dos o más pedazos.

7 PUNTOS

6. Se tiene un trapecio *ABCD* de bases paralelas *AD* y *BC* que tiene una circunferencia inscripta. Sea *E* el punto de intersección de las diagonales del trapecio. Demostrar que es imposible que el ángulo $A\hat{E}D$ sea agudo.

ACLARACIÓN: Una circunferencia está inscripta en un trapecio si es tangente a los cuatro lados del trapecio.

7 PUNTOS

XXIV TORNEO DE LAS CIUDADES (PRIMAVERA DEL HEMISFERIO NORTE)
NIVEL MAYOR

1. Dado un tetraedro, denotamos R al radio de la esfera circunscripta, r al radio de la esfera inscripta, a la longitud de la arista mayor y h la menor de las alturas (desde un vértice a la cara opuesta). Demostrar que $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$.

ACLARACIÓN: La *esfera circunscripta* de un tetraedro es la que pasa por los cuatro vértices del tetraedro. La *esfera inscripta* de un tetraedro es la esfera tangente a las cuatro caras del tetraedro.

4 PUNTOS

2. Se tiene un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales, y una sucesión infinita de números naturales distintos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que satisfacen $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2, \ldots$
Determinar los valores posibles del grado del polinomio $P(x)$.

5 PUNTOS

3. Decidir si es posible cubrir completamente la superficie de un cubo con tres triángulos de papel, sin huecos ni superposiciones.

5 PUNTOS

4. Se tiene un triángulo rectángulo ABC de hipotenusa AB, inscripto en una circunferencia. Sean K el punto medio del arco $\overset{\frown}{BC}$ que no contiene a A, N el punto medio del segmento AC, y M el punto de intersección de la semirrecta KN con la circunferencia. Se trazan tangentes a la circunferencia por A y por C; estas tangentes se cortan en E. Demostrar que el ángulo $E\hat{M}K$ es recto.

ACLARACIÓN: Un triángulo está inscripto en una circunferencia si la circunferencia pasa por los tres vértices del triángulo.

6 PUNTOS

5. Carlos elige un entero mayor que 100 (pero no lo dice). Lucas dice un entero d mayor que 1. Si el número de Carlos es divisible por d, gana Lucas. Si no, Carlos le resta d a su número, éste es su nuevo número, y el juego sigue: Lucas debe decir un entero, si divide al nuevo número de Carlos, gana Lucas, etc. Lucas tiene prohibido decir dos veces un mismo número. Cuando el número de Carlos se hace negativo, pierde Lucas. Determinar si Lucas puede jugar de modo que siempre gana, no importa que número elija Carlos.

6 PUNTOS

6. En cada casilla de un tablero de 4×4 hay un signo "+" o un signo "–". La operación permitida es elegir una casilla y cambiar el signo de esa casilla junto con todos los de sus vecinas (que tienen un lado en común). Determinar cuántos tableros diferentes se pueden obtener repitiendo la operación permitida.

7 PUNTOS

7. Dentro de un cuadrado se eligen varios puntos y se trazan segmentos que unan estos puntos y los vértices del cuadrado, tales que los segmentos no se corten (excepto en sus extremos). Así resulta el cuadrado dividido en triángulos de modo que los puntos elegidos al comienzo son vértices de estos triángulos y ninguno está en el interior del lado de un triángulo. Para cada punto elegido y para cada vértice del cuadrado se cuenta el número de segmentos que emanan de ese punto (o vértice). Decidir si es posible que todos estos números sean pares.

8 PUNTOS