CUENCA DEL ALTO PARANÁ
Soluciones - Primer Nivel

Problema 1: Si se traza una recta m paralela a r que pase por el centro del rectángulo, éste quedará seccionado en dos trapecios iguales. En efecto, trazando paralelas a los lados del rectángulo por los puntos de intersección de m con el borde del rectángulo, como muestra la figura, se forman dos triángulos iguales, uno en cada trapecio. La igualdad de estos triángulos se debe a que tienen un par de ángulos iguales, alternos internos entre paralelas, y el lado adyacente a estos ángulos, es común.

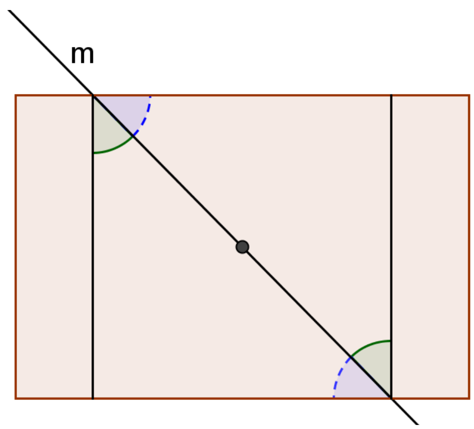


Figura 1

Por otra parte, hay dos rectángulos, uno en cada trapecio. Estos rectángulos tienen uno de sus lados igual a un lado del rectángulo dado como se observa en la Figura 1. En la Figura 2, al trazar la diagonal del rectángulo, quedan formados 2 triángulos que resultan iguales por tenerlos 3 ángulos iguales y un par de lados correspondientes de igual longitud, precisamente los lados que se encuentran sobre la diagonal del rectángulo.

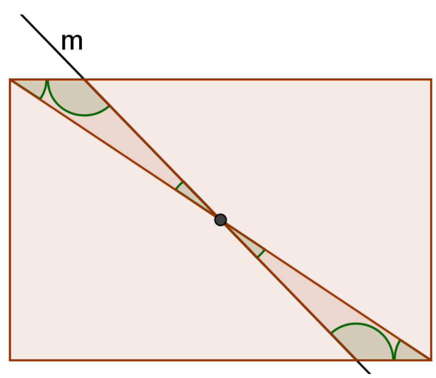


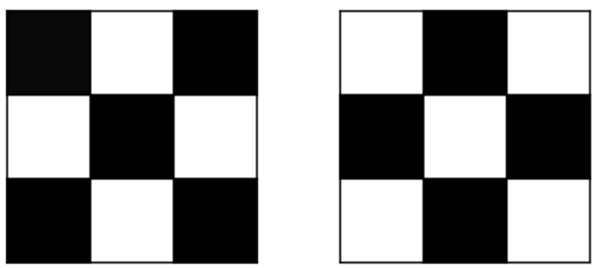
Figura 2

Los lados opuestos al vértice común en estos triángulos son lados de los rectángulos anteriormente considerados en cada trapecio, y por lo tanto dichos rectángulos son iguales

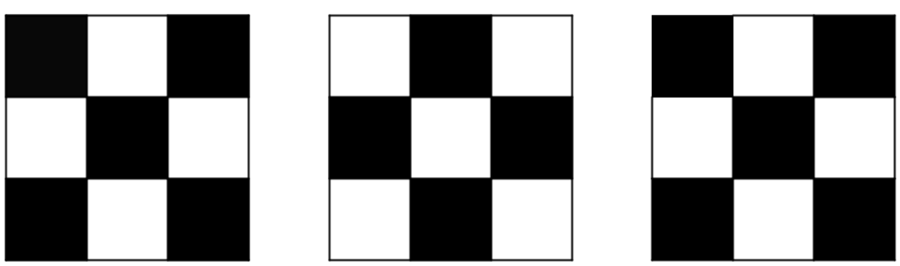
Comentario: Otra solución más simple se apoya en el hecho que el rectángulo (o un paralelogramo) es simétrico respecto de su centro, es decir, si el rectángulo se hiciera rotar 180^o alrededor de su centro, se obtiene el mismo rectángulo mientras que los trapecios en ambos lados de la recta m, se superponen uno en el otro.

Problema 2: En el triángulo BCD, su base CD es un tercio de la base AC de ABC, mientras que la altura correpondiente en BCD y ABC es común. El área de BCD es entonces $\frac{1}{3}$ del área de ABC, es decir $4cm^2$. Luego el área de ABD es $8cm^2$. Como AED y EBD comparten la altura sobre AE y EB respectivamente, y $AE = EB$, resulta que AED y EBD tienen la misma área, o sea, ambas áreas miden $4m^2$.

Problema 3: El cubo quedará formado por 3 pisos de 9 dados cada uno. Cada piso puede tomar uno de los tipos que se muestra en la figura:



Dos pisos vecinos deberán ser de tipo distinto por las condiciones de ensamble, es decir, necesariamente el cubo tendrá dos pisos de un tipo y uno de otro tipo. En cada piso hay 5 dados de un color, negro o blanco, y 4 del otro color, respectivamente blanco o negro. Por ejemplo, la situación siguiente:

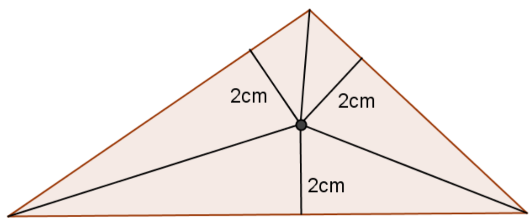


En conclusión, se necesitan 14 dados de un color y 13 dados del otro color.

CUENCA DEL ALTO PARANÁ

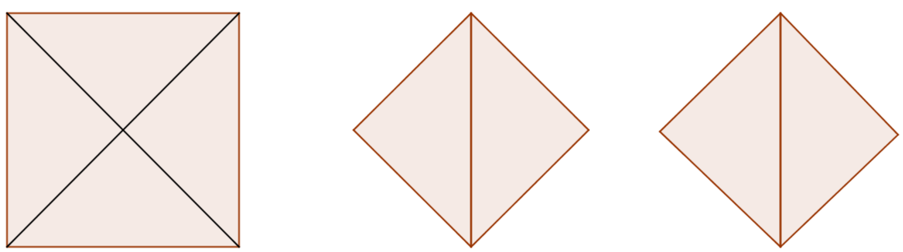
Soluciones - Segundo Nivel

Problema 1: El triángulo puede ser descompuesto en 3 triángulos, todos ellos con una altura de $2cm$ y los distintos lados del triángulo como las bases correspondientes, tal como lo ilustra la figura.



La suma de las áreas de estos 3 triángulos coincide con el área del triángulo dado y de alli se obtiene que el perímetro buscado es $21cm$.

Problema 2: El tirante puede cortarse en forma longitudinal en cuatro partes para pegar las piezas de a 2 como se indica en la figura.



Problema 3: Juntando los caminos recorridos por los amigos que salen desde las esquinas opuestas A y C, se obtiene un camino desde A hasta C, sin vueltas ni retrocesos, lo que equivale en cuadras, a un camino desde A a B y desde B hasta C como se ve en la figura:

Análogamente ocurre con los amigos que salen desde las esquinas opuestas B y D. Se conluye que el perímetro de la ciudad es de 60 cuadras. El número de cuadras desde A hasta B por el número de cuadras desde B hasta C es 200, por coincidir con el número de manzanas de la ciudad. Por otra parte, el número de cuadras desde A hasta B más el número de cuadras desde B hasta C es 30. Descomponiendo 200 en factores primos, resulta $200 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5$ y los números de cuadras buscados surgen de una descomposición de 200 en dos factores cuya suma sea igual a 30. Estos dos factores se obtienen distribuyendo los primos $2, 2, 2, 5, 5$ en dos grupos. Si los dos 5 quedan en un mismo grupo, el factor correspondiente será 25 pues este grupo no admite otro primo por que superaría a 30 y el otro factor debe ser 8. En este caso la suma supera a 30. Los 5 deben estar, uno en cada factor; los 2 no pueden estar todos en un mismo factor, por los tanto ambos factores deben ser múltiplos de 10, y no hay otra solución que 10 y 20.
Comentario: Para quienes conozcan la ecuación cuadrática, si a y b son los lados del rectángulo, $a + b = 30$ y $ab = 200$ lleva a la ecuación :

$$x^2 - 30x + 200 = 0$$

cuyas raíces son:

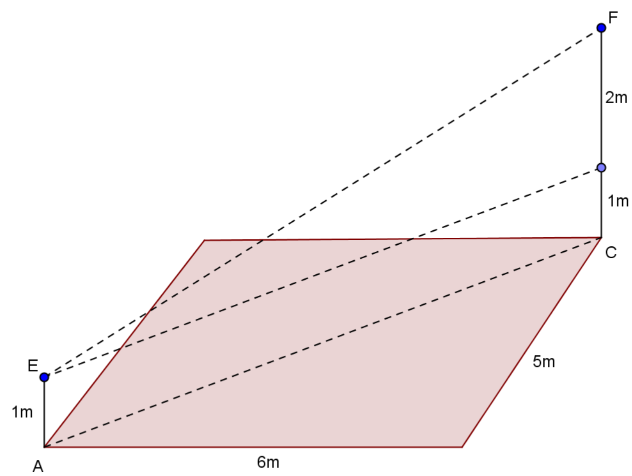
$$\frac{30 \pm \sqrt{900 - 800}}{2}$$

es decir 20 y 10.

CUENCA DEL ALTO PARANÁ

Soluciones - Tercer Nivel

Problema 1: Con las notaciones de la figura, el farol no será mojado si la distancia entre E y F es mayor que 8.

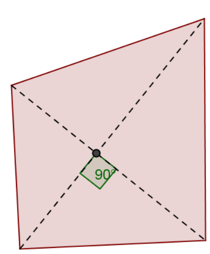


Para calcular dicha distancia, aplicamos dos veces Pitágoras:

$$\begin{aligned} AC^2 &= 36+25=61 \\ & \text{y} \\ EF^2 &= 61+4=65 \end{aligned}$$

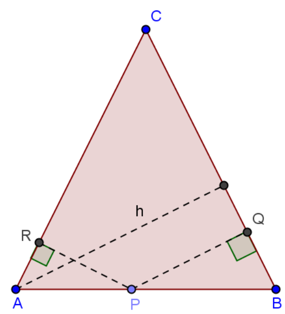
Se concluye que $EF=\sqrt{65}>8$.

Problema 2: Solución 1: Usaremos el siguiente principio: *Si un cuadrilátero tiene sus diagonales perpendiculares, entonces su área es un medio del producto de las diagonales.*



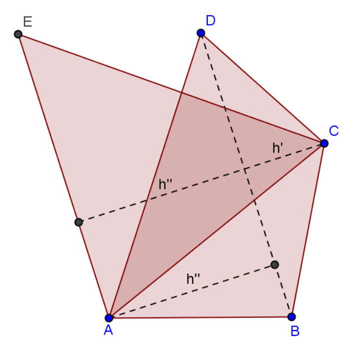
El hexágono regular se puede descomponer en 6 cuadriláteros en la situación mencionada, donde en cada uno de ellos una diagonal es un lado del hexágono inscripto y la otra es igual al lado r del hexágono regular. El área del hexágono regular es, por una parte, la suma de las áreas de los 6 cuadriláteros que lo componen, esto es $\frac{1}{2}p \times r$, donde p es el perímetro del hexágono inscripto. Por otra parte, es igual a perímetro por apotema sobre 2, es decir $\frac{1}{2}6r \times 2 = 6r$. Igualando ambos resultados y simplificando se obtiene $p = 12cm$.

Solución 2: Usaremos el siguiente principio: *En un triángulo isósceles ABC, si desde un punto P en la base AB se trazan los segmentos PQ y PR perpendiculares a los lados iguales, como lo muestra la figura, la suma $PQ + PR = h$, donde h es la altura correspondiente a los lados iguales.*



Esta situación se aplica a cada uno de los triángulos equiláteros que componen el hexágono regular, donde el punto P es, en cada caso, un vértice del hexágono inscripto. Luego el perímetro del hexágono inscripto es 6 veces la altura del triángulo equilátrero, es decir 6 veces la apotema del hexágono regular, igual a $12cm$.

Problema 3: La diagonal BD del cuadrilátero, descompone a la altura h del triángulo ACE en los segementos h' y h" según muestra la figura.



El área del cuadrilátero es igual a la del triángulo ABD más la del triángulo BCD, es decir:

$$\frac{1}{2}BD \times h" + \frac{1}{2}BD \times h' = \frac{1}{2}BD \times (h" + h') = \frac{1}{2}BD \times h$$

Dado que $AE = BD$, el área de ACE resulta igual a la del cuadrilátero $ABCD$, es decir a $9cm^2$.