XXVIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
PRUEBA DE SELECCIÓN
PRIMER DÍA (08/08/13)

EN TODOS LOS PROBLEMAS,
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

1. Un triángulo equilátero de lado 12 está dividido, mediante paralelas a sus lados, en 144 triangulitos de lado 1. Llamamos casillas a los triangulitos de lado 1. Algunas casillas están infectadas. Una casilla no infectada se contagia si al menos dos de sus vecinas (con las que comparte un lado) están infectadas. Determinar el número mínimo inicial de casillas que deben estar infectadas para que, en algún momento, todas las casillas del triángulo de lado 12 estén infectadas.

2. Hallar todos los pares de números enteros a y b tales que

$$\frac{a^2+1}{2b^2-3}=\frac{a-1}{2b-1}.$$

3. Sea ABC un triángulo isósceles de base AB. Se eligen los puntos P en el lado AC y Q en el lado BC tales que $AP+BQ=PQ$. La recta paralela a BC que pasa por el punto medio del segmento PQ corta al segmento AB en N. La circunferencia que pasa por los vértices del triángulo PNQ corta a la recta AC en los puntos P y K, y a la recta BC en los puntos Q y L. Si R es el punto de intersección de las rectas PL y QK, demostrar que la recta PQ es perpendicular a la recta CR.

XXVIII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

PRUEBA DE SELECCIÓN

SEGUNDO DÍA (09/08/13)

EN TODOS LOS PROBLEMAS, LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

4. Dado un triángulo *ABC* con $AC = \frac{AB + BC}{2}$, sea *BL* la bisectriz del ángulo ABC; sean *K* y *M* los puntos medios de *AB* y *BC* respectivamente. Calcular el valor del ángulo KLM si se sabe que $ABC = \beta$.

5. Hallar todos los números naturales *n* para los cuales es posible partir el conjunto $\{1, 2, ..., 3n\}$ de los primeros 3*n* números naturales en conjuntos de tres elementos $\{a, b, c\}$ tales que $b-a$ y $c-b$ son dos elementos distintos del conjunto $\{n-1, n, n+1\}$.

6. Se tiene un cubo de $10\times10\times10$ dividido en 1000 cubitos unitarios mediante planos paralelos a sus caras. Inicialmente todos los cubitos son blancos. Alejo y Beto juegan al siguiente juego. Alejo elije una o varias tiras de $1\times1\times10$ en cualquiera de las tres direcciones posibles del cubo, tales que no haya dos de estas tiras que tengan puntos en común, y colorea de negro todos sus cubitos unitarios. A continuación, Beto, que no ve el cubo, selecciona algunos cubitos unitarios y le pregunta a Alejo que color tienen. Determinar el menor número de cubitos unitarios que debe elegir Beto para determinar con certeza todos los cubito negros a partir de la respuesta de Alejo.