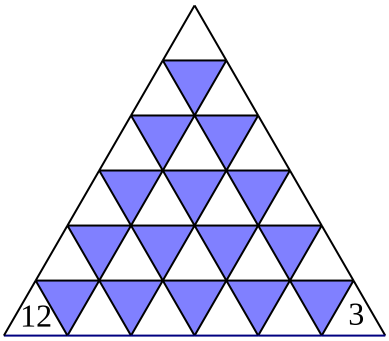
XXVI OLIMPÍADA MATEMÁTICA DEL CONO SUR

PRUEBA DE SELECCIÓN
PRIMER DÍA (07/04/15)

EN TODOS LOS PROBLEMAS,

LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

1. En cada casilla blanca del tablero de la figura hay que escribir un número entero de modo que para cada triangulito gris la suma de los tres números de sus tres casillas blancas vecinas sea múltiplo de 5. Los triangulitos inferior izquierdo e inferior derecho ya tienen escrito un número cada uno, respectivamente 12 y 3. Hallar todos los enteros que pueden figurar en la casilla superior.



2. Se tienen 111 enteros positivos distintos menores o iguales que 500. Determinar si es posible que para cada uno de estos números el último dígito (de la derecha) coincida con el último dígito de la suma de todos los demás 110 números.

3. Para cada número natural n denotamos $g(n)$ al mayor divisor impar de n. Calcular la suma de 2^{2015} términos

$$g(1)+g(2)+g(3)+...+g(2^{2015}).$$

XXVI OLIMPÍADA MATEMÁTICA DEL CONO SUR

PRUEBA DE SELECCIÓN
SEGUNDO DÍA (08/04/15)

EN TODOS LOS PROBLEMAS, LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

4. Dado un triángulo acutángulo *ABC* sea *H* el punto de intersección de las alturas AA_1, BB_1, CC_1. Sean *M* y *N* los puntos medios de los segmentos *BC* y *AH*, respectivamente. Demostrar que *MN* es la mediatriz del segmento B_1C_1.

ACLARACIÓN: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento, trazada por su punto medio.

5. Hallar todos los pares de primos *p*, *q* tales que $p+q$ y $p+4q$ son los dos cuadrados perfectos.

6. Sea $n \geq 6$ un número entero. Tenemos a nuestra disposición *n* colores. Coloreamos cada casilla de un tablero de $n \times n$ con uno de los *n* colores.

a) Demostrar que, para cualquiera de estas coloraciones, existe un camino de un caballo de ajedrez desde la casilla del extremo inferior izquierdo hasta la casilla del extremo superior derecho que no pasa por todos los colores.

b) Demostrar que si reducimos el número de colores a $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 2$, entonces la afirmación de a) es verdadera para infinitos valores de *n* y es falsa también para infinitos valores de *n*.

ACLARACIONES: En cada paso, el caballo une las casillas opuestas de un rectángulo de 2×3 (o de 3×2).

$\lfloor x \rfloor$ indica la parte entera del número *x*.