

SEGUNDO PRETORNEO 2009 JUVENIL

1. Leandro afirma que halló un número entero positivo tal que si se lo aumenta en un 10% se obtiene otro número entero positivo, y la suma de los dígitos de este nuevo número es igual a la suma de los dígitos del que halló disminuida en un 10%. Mostrar que lo que dice Leandro puede ser cierto.

4 PUNTOS

2. Juan tiene cubos del mismo tamaño. En cada cara de cada cubo está escrito un dígito de modo que usando estos cubos se pueden formar todos los posibles números enteros positivos de 3 dígitos. Determinar la menor cantidad de cubos que puede tener Juan. (No se puede obtener el 6 dando vuelta el 9 y viceversa.)

5 PUNTOS

3. Se tiene un polígono convexo de 9 lados al que se le trazaron todas las diagonales. Se traza una recta que corta al polígono y no pasa por ninguno de sus vértices. Demostrar que esta recta corta a un número par de diagonales del polígono.

ACLARACIÓN: Un polígono se dice convexo si todos sus ángulos interiores miden menos de 180° .

5 PUNTOS

4. Se tiene una sucesión de 1 y 0. En esta sucesión, consideremos los pares de dígitos (no necesariamente vecinos) tales que el de la izquierda es 1 y el de la derecha es 0. Sea P el número de estos pares en los que el 1 y el 0 están separados por una cantidad par de dígitos (puede ser cero), y sea I el número de pares en los que el 1 y el 0 están separados por una cantidad impar de dígitos. Demostrar que $P \geq I$.

5 PUNTOS

SEGUNDO PRETORNEO 2009 MAYOR

1. Se tiene un polígono convexo de 2009 lados al que se le trazaron todas las diagonales. Se traza una recta que corta al polígono y no pasa por ninguno de sus vértices. Demostrar que esta recta corta a un número par de diagonales del polígono.

ACLARACIÓN: Un polígono se dice convexo si todos sus ángulos interiores miden menos de 180° .

4 PUNTOS

2. Denotamos a^b al número a^b . El orden de las operaciones en la expresión $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^7}}}}}}$ se determina usando 5 pares de paréntesis. Por ejemplo,

$7^{((7^7)^7)^{((7^7)^7)^7}}$ equivale a $7^{(7^7)^{(7^7)^7}}$. Decidir si es posible colocar los paréntesis de dos maneras distintas de modo que el valor de la expresión en ambos casos sea el mismo.

5 PUNTOS

3. Un programa de computadora genera una sucesión de números naturales con la siguiente regla: Germán elige los primeros dos números; a partir de entonces, el programa calcula la suma de los últimos dos números generados. El mayor divisor impar del resultado de esta suma es el siguiente número generado. Por ejemplo, si los números que elige Germán son 23 y 5 (en ese orden), la computadora hace $23 + 5 = 28$ y genera el 7, que es el mayor divisor impar de $28 = 4 \cdot 7$. El siguiente número generado será 3, pues $5 + 7 = 12$ y el mayor divisor impar de 12 es 3; etc.

a) Demostrar que a partir de algún lugar, la computadora genera siempre un mismo número.

3 PUNTOS

b) ¿Cómo se puede determinar este entero que se repite si conocemos los enteros a y b ?

2 PUNTOS

4. Sea $ABCD$ un rombo de lados AB , BC , CD , DA con $DAB = 120^\circ$. Se consideran puntos M y N de los lados BC y CD respectivamente tales que $NAM = 30^\circ$. Demostrar que el circuncentro del triángulo NAM pertenece a una diagonal del rombo.

ACLARACIÓN: El circuncentro del triángulo NAM es el centro de la circunferencia que pasa por N , A y M .

5 PUNTOS