SEGUNDO PRETORNEO 2006
JUVENIL

1. En cada casilla de un tablero de 50×50 se escribe un número: todas las casillas de la primera columna tienen un 1, todas las casillas de la segunda columna tienen un 2, todas las casillas de la tercera columna tienen un 3, y así siguiendo, todas las casillas de la última columna tienen un 50. Se borran los números de las 50 casillas de la diagonal que conecta la esquina superior izquierda con la esquina inferior derecha del tablero. Demostrar que la suma de los números de las 1225 casillas del tablero que están arriba de esta diagonal es igual al doble de la suma de los números de las 1225 casillas del tablero que están debajo de esta diagonal.
ACLARACIÓN: En el tablero, las columnas son verticales.

4 PUNTOS

2. Sea *ABC* un triángulo con $\hat{A} = 60^{\text{o}}$. La mediatriz del lado *AB* corta a la recta *AC* en el punto *N*. La mediatriz del lado *AC* corta a la recta *AB* en el punto *M*. Demostrar que $BC = MN$.
ACLARACIÓN: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

5 PUNTOS

3. Tres amigos, Ana, Beto y Coco, juegan al siguiente juego con nueces. Al comienzo, Ana tiene todas las nueces y los otros dos, ninguna. Si la cantidad de nueces es impar, Ana se come una, y luego le pasa a Beto la mitad de las nueces que tiene y a Coco la otra mitad, quedándose sin nueces. Si la cantidad de nueces es par, Ana le pasa a Beto la mitad de las nueces y a Coco la otra mitad, quedándose sin nueces. Luego juega Beto, que le pasa la mitad de sus nueces a Coco y la otra mitad a Ana si la cantidad que tiene es par, y si no, antes de pasar las nueces, se come una. A continuación juega Coco, que le pasa la mitad de sus nueces a Ana y la otra mitad a Beto si tiene una cantidad par de nueces, y si no, se come una antes de hacer su jugada. Y así siguiendo, cada chico en su turno, si tiene una cantidad impar de nueces, se come una y pasa las restantes, en partes iguales, a sus dos amigos, o si tiene una cantidad par, directamente pasa la mitad a uno de sus amigos y la otra mitad al otro.
¿Es posible, para alguna cantidad inicial de nueces, que nunca se coma ninguna nuez?

3 PUNTOS

¿Es posible, para alguna cantidad inicial de nueces, que en algún momento se queden sin nueces porque se las comieron todas?

3 PUNTOS

4. Con 8 cubitos blancos de lado 1 Gonzalo tiene que armar un cubo de $2 \times 2 \times 2$. Nico quiere pintar de negro algunas caras de algunos de los cubitos, de manera que a Gonzalo le resulte imposible lograr que su cubo sea totalmente blanco por fuera. Determinar el mínimo número de caras de cubitos que tiene que pintar Nico.

2 PUNTOS

¿Y si Gonzalo tuviera que armar un cubo de $3 \times 3 \times 3$ con 27 cubitos blancos de lado 1?

4 PUNTOS

SEGUNDO PRETORNEO 2006
MAYOR

1. A partir de un poliedro convexo P de 100 aristas se fabrica otro poliedro convexo Q con el siguiente procedimiento: en cada vértice de P se rebana ese vértice junto con una pequeña pirámide, de modo que la pequeña pirámide de cada vértice no se toque con la de otro vértice. Determinar el número de vértices y el número de aristas del poliedro Q así construido.

4 PUNTOS

2. El número $a > 0$ es tal que la desigualdad $\frac{1}{a} < x < \frac{2}{a}$ tiene exactamente 3 soluciones enteras. Para cada a, determinar cuántas soluciones enteras tiene la desigualdad $\frac{2}{a} < x < \frac{3}{a}$. (Dar todas las posibilidades.)

5 PUNTOS

3. Con n^3 cubitos blancos de lado 1 Gonzalo tiene que armar un cubo de $n \times n \times n$. Nico quiere pintar de negro algunas caras de algunos de los cubitos, de manera que a Gonzalo le resulte imposible lograr que su cubo sea totalmente blanco por fuera. Determinar el mínimo número de caras de cubitos que tiene que pintar Nico si $n = 3$.

3 PUNTOS

¿Y si $n = 10$?

3 PUNTOS

4. Sean A, B, C, D cuatro puntos de una circunferencia tales que el cuadrilátero $ABCD$ tiene el lado AB igual al lado AD. Sean M en el lado BC y N en el lado CD tales que $M\hat{A}N = \frac{1}{2} B\hat{A}D$. Demostrar que $MN = BM + ND$.

NOTA: Un cuadrilátero convexo tiene sus cuatro vértices sobre una circunferencia si y sólo si la suma de dos ángulos opuestos es igual a 180º.

6 PUNTOS