PRIMER PRETORNEO 2006
JUVENIL

1. En un tablero de 15×15 se coloca una ficha, en una casilla elegida por el jugador. En cada movida la ficha salta sobre 8 casillas (todas horizontales o todas verticales) y cae en la novena o salta sobre 9 casillas (todas horizontales o todas verticales) y cae en la décima. Está prohibido que la ficha visite alguna casilla más de una vez. Determinar el máximo número de casillas que puede visitar la ficha.

4 PUNTOS

2. Gonzalo tiene 11 varillas. No se sabe cuánto miden ni si son iguales o distintas. Se sabe que
La suma de las longitudes de las 11 varillas es igual a 11 metros;
Ninguna varilla mide más de A metros (A es un número no necesariamente entero),
Con 3 de las 11 varillas, no importa cuales 3 se elijan, siempre es posible armar un triángulo.
Hallar entre qué valores debe estar comprendido el número A.
ACLARACIÓN: Con tres varillas de longitudes x, y, z se puede armar un triángulo si y sólo si $x<y+z$, $y<z+x$, $z<x+y$,

5 PUNTOS

3. Sea ABC un triángulo y D, E, F los puntos medios de los lados BC, CA, AB, respectivamente. Se trazan las alturas desde A, B, C que cortan la lado opuesto en L, M, N, respectivamente. Demostrar que con tres segmentos iguales a DN, EL, FM se forma un triángulo.

5 PUNTOS

4. Se tienen 6 monedas, una de las cuales es falsa. No se conoce el peso de las monedas (ni las auténticas ni la falsa), pero se sabe que las auténticas pesan todas lo mismo y ese peso es distinto del de la falsa. Con una balanza que indica el peso de los objetos que se colocan en su plato, describir cómo se puede identificar la moneda falsa realizando 3 pesadas.

5 PUNTOS

PRIMER PRETORNEO 2006
MAYOR

1. Decidir si existen enteros positivos *a*, *b* y *n* tales que $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$.

4 PUNTOS

2. En cada vértice de un cubo se escribe un número. En cada etapa, cada número se reemplaza por el promedio de los números de los tres vértices vecinos. Cada vez, los ocho números se reemplazan simultáneamente. Al cabo de 10 etapas, los ocho números son respectivamente iguales a los valores iniciales. Decidir si esto obliga necesariamente a que los 8 números iniciales sean iguales entre si.

5 PUNTOS

3. (a) Se da un segmento de longitud *a*. Indicar cómo a partir de este dato se puede construir un segmento de longitud $a\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$, utilizando exclusivamente regla y compás.

2 PUNTOS

(b) Se da un segmento de longitud $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Indicar cómo a partir de este dato se puede construir un segmento de longitud 1, utilizando exclusivamente regla y compás.

3 PUNTOS

4. Sobre los tres lados de un triángulo rectángulo *ABC* se construyen externamente cuadrados de centros *D*, *E*, *F*. Demostrar que

a) $\dfrac{\text{área}(DEF)}{\text{área}(ABC)} > 1$;

2 PUNTOS

b) $\dfrac{\text{área}(DEF)}{\text{área}(ABC)} \geq 2$.

3 PUNTOS