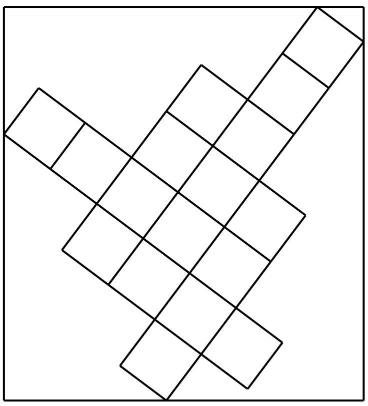
PRIMER NIVEL

XXXIV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Un rectángulo, que no es un cuadrado, y que está cuadriculado en cuadritos de 1×1 se divide en exactamente 8 figuras poligonales distintas siguiendo líneas de la cuadrícula. Determinar cuál es el menor valor posible del área del rectángulo inicial.

Problema 2.
La figura está compuesta por cuadrados pequeños iguales entre sí encerrados en un rectángulo. El lado horizontal del rectángulo mide 73 y el lado vertical mide 94. Calcular el lado de cada cuadrado pequeño.



Problema 3.
En un tablero de 16×16 se numeran sus filas de arriba hacia abajo con los números enteros del 1 al 16 y se numeran sus columnas de izquierda a derecha con los números enteros del 1 al 16. Luego se escribe un número en cada casilla del tablero con la siguiente regla: en la casilla de la fila i y la columna j se escribe el número $i \cdot j$. Por ejemplo, en la casilla de la fila 5 y la columna 3 se escribe el número 15. La operación permitida consiste en elegir dos o más filas del tablero, elegir dos o más columnas del tablero y borrar todos los números que están en la intersección de una fila y una columna elegidas.
a) Determinar si se pueden elegir las filas y columnas para que la suma de todos los números borrados sea un número primo.
b) Determinar si se pueden elegir las filas y columnas para que la suma de todos los números que no se borraron sea un número primo.

PRIMER NIVEL

XXXIV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
En cada cara de un cubo hay escrito un número entero positivo. A cada vértice del cubo se le asignó la multiplicación de los números de las tres caras que tienen ese vértice en común. La suma de los 8 números asignados a los vértices es 315. Determinar la suma de los números de las caras (dar todas las posibilidades).

Problema 5.
Escribir en cada casilla de un tablero de 4×4 un número entero positivo de modo que los 16 números escritos sean distintos, que las sumas de los cuatro números escritos en cada una de las cuatro filas sean iguales y que las multiplicaciones de los cuatro números escritos en cada una de las cuatro columnas sean iguales.

Problema 6.
Facu y Nico juegan un juego con un cuadrado cuadriculado de 13×13. Con una tijera Facu divide completamente el cuadrado en rectángulos con un lado igual a 1, siguiendo las líneas de la cuadrícula, en cualquier modo que quiera. Luego Nico elige un número entero k entre 1 y 13 inclusive y toma todos los rectángulos de $1\times k$ que haya entre los cortados por Facu. Determinar el mayor número de cuadritos de la cuadrícula que Nico puede estar seguro de tener en total entre todos los rectángulos que tomó.

SEGUNDO NIVEL

XXXIV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
En una mesa hay 16 pesas del mismo aspecto que tienen todos los pesos enteros de gramos desde 13 hasta 28, es decir, pesan 13, 14, 15, ..., 28 gramos. Determinar las cuatro pesas que pesan 13, 14, 27, 28 gramos, utilizando una balanza de dos platos a lo más 26 veces.

Problema 2.
Diremos que un conjunto de números enteros positivos es *regular* si, para toda elección de números del conjunto, la suma de los números elegidos es distinta de 1810. Dividir el conjunto de los números enteros desde 452 hasta 1809 inclusive en la menor cantidad posible de conjuntos regulares.

Problema 3.
Dado un polígono, una *triangulación* es una división del polígono en triángulos cuyos vértices son vértices del polígono. Determinar los valores de n para los que el polígono regular de n lados tiene una triangulación con todos sus triángulos isósceles.

SEGUNDO NIVEL

XXXIV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Hallar todos los números enteros positivos *a* tales que $4x^2 + a$ es primo para todo $x = 0,1,...,a-1$.

Problema 5.
Se tiene un cuadrilátero convexo *ABCD* de lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA*, con $AB = BD = 8$ y $CD = DA = 6$. Sean *P* en el lado *AB* tal que *DP* es bisectriz del ángulo ADB y *Q* en el lado *BC* tal que *DQ* es bisectriz del ángulo CDB. Determinar el valor del radio de la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo *DPQ*.

Problema 6.
En las elecciones para gobernador había tres candidatos, *A*, *B*, *C*. En la primera ronda *A* recibió 44% del número de votos que recibieron, entre los dos, *B* y *C*. Ningún candidato obtuvo la mayoría necesaria para ganar en primera vuelta y *C* fue el que recibió menos votos de los tres, de modo que hubo balotaje entre *A* y *B*. Los votantes del balotaje eran los mismos de la primera ronda, excepto *p*% de los que votaron a *C* que eligieron no participar en el balotaje; *p* es un número entero, $1 \le p \le 100$. Se sabe además que todos los que votaron a *B* en la primera ronda también lo votaron de nuevo en el balotaje, pero no se sabe qué hicieron los que votaron a *A* en primera ronda.
Un periodista afirma que, sabiendo todo esto, uno puede inferir con certeza quién es el ganador del balotaje. Determinar para qué valores de *p* el periodista dice la verdad.
Nota. El ganador del balotaje es el que obtiene más de la mitad del número total de votos emitidos en el balotaje.

TERCER NIVEL

XXXIV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1.
Nico elige 13 números enteros positivos distintos de 3 dígitos cada uno. Luego Ian selecciona varios de estos 13 números, los que quiera, y utilizando una sola vez cada número seleccionado y algunas de las operaciones suma, resta, multiplicación y división $(+, -, \times, :)$ debe obtener una expresión cuyo valor sea mayor que 3 y menor que 4. Si lo logra, gana Ian; en otro caso, gana Nico. ¿Cuál de los dos tiene estrategia ganadora?

Problema 2.
En una fila hay escritos 51 números enteros positivos. Su suma es 100. Un entero es *representable* si se puede expresar como suma de varios números consecutivos de la fila de 51 enteros. Demostrar que para cada *k*, con $1 \leq k \leq 100$, uno de los números k y $100 - k$ es representable.

Problema 3.
Sean *ABC* un triángulo de perímetro 100 e *I* el punto de intersección de sus bisectrices. Sea *M* el punto medio del lado *BC*. La recta paralela a *AB* trazada por *I* corta a la mediana *AM* en el punto *P* de modo que $\frac{AP}{PM} = \frac{7}{3}$. Hallar la longitud del lado *AB*.

TERCER NIVEL

XXXIV OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4.
Para un número entero positivo *n* denotamos $D_2(n)$ a la cantidad de divisores de *n* que son cuadrados perfectos y $D_3(n)$ a la cantidad de divisores de *n* que son cubos perfectos. Demostrar que existe *n* tal que $D_2(n) = 999D_3(n)$.
Nota. Los cuadrados perfectos son $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$; los cubos perfectos son $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$.

Problema 5.
Diremos que una lista de números enteros positivos es *admisible* si todos sus números son menores o iguales que 100 y su suma es mayor que 1810. Hallar el menor entero positivo *d* tal que a cada lista admisible se le pueden tachar algunos números de modo que la suma de los números que quedaron sin tachar sea mayor o igual que $1810 - d$ y menor o igual que $1810 + d$.
Nota. La lista puede tener números repetidos.

Problema 6.
Se trazan todas las diagonales de un polígono convexo de 10 lados. Ellas dividen sus ángulos en 80 partes. Se sabe que al menos 59 de estas partes son iguales. Determinar la mayor cantidad de valores distintos entre los 80 ángulos de la división y cuántas veces ocurre cada uno de esos valores.