PRIMER NIVEL

XXXI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1
Hay discos negros y discos blancos distribuidos en 3 pilas. En cada pila los colores se alternan de la siguiente manera, contando desde abajo: 11 negros, 10 blancos, 9 negros, 8 blancos, …, 3 negros, 2 blancos, 1 negro. Una movida legal es quitar uno o varios discos del mismo color de los que están arriba en una pila, sin reacomodar los restantes. Dos jugadores Ana y Brian hacen movidas por turnos hasta que se quitan todos los discos; Ana comienza el juego. Determinar cuál jugador tiene una estrategia ganadora si el que quita el último disco pierde.

Problema 2
Un dispositivo electrónico con dos teclas, una roja y una amarilla, muestra en su pantalla un número entero. Al apretar la tecla roja el número n de la pantalla se reemplaza por $2n-7$ y al apretar la tecla amarilla el número n de la pantalla se reemplaza por $3n-14$. Comenzando con $n=77$, luego de apretar varias veces las teclas, aparece en la pantalla un número N mayor que 777777. Hallar el menor de tales números N.

Problema 3
Se tienen varias fichas de varios colores y tamaños. No hay entre ellas dos que tengan, simultáneamente, el mismo color y el mismo tamaño. En cada ficha F hay escritos dos números. Uno de ellos es la cantidad de fichas que tienen el mismo color que F pero distinto tamaño que F. El otro número es la cantidad de fichas que tienen el mismo tamaño que F pero distinto color.
Se sabe que cada uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 está escrito al menos una vez. Hallar el menor valor de la suma de todos los números escritos.

PRIMER NIVEL

XXXI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4

Dados 77 puntos, se unen todos con todos y se colorea cada segmento de verde o azul. Se sabe que los puntos se pueden dividir en 7 grupos de modo que en cada grupo cada par de puntos estén unidos por un segmento verde. También se sabe que en cada una de estas divisiones el tamaño de cada grupo es 11. Dar un ejemplo de tal configuración con la máxima cantidad posible de segmentos verdes.

Problema 5

Sea ABC un triángulo, AD la bisectriz del ángulo $B\hat{A}C$, con D en BC, y M el punto medio de BC. La paralela a AD trazada por M corta a la recta AB en E y al lado AC en F. Si $AB = 18$ y $AC = 25$, calcular las longitudes de los segmentos BE y CF.

Problema 6

Dos jugadores, Alan y Bea, juegan del siguiente modo. Alan elige dos números enteros positivos a y b. A continuación, conociendo a y b, Bea colorea todos los números enteros positivos con dos colores. Si, después de esto, es posible elegir (por lo menos) dos números enteros positivos x, y del mismo color tales que $y - x$ sea igual a a o igual a b, gana Alan. Si no, gana Bea. Determinar cuál gana para cada una de las siguientes elecciones de a y b:

a) 7 y 11; b) 13 y 20; c) 8 y 12; d) 24 y 40.

SEGUNDO NIVEL

XXXI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1

La operación permitida sobre tres enteros no negativos dados es aumentar dos de ellos en 1 y disminuir el tercero en 2, siempre y cuando los nuevos números sean no negativos. El proceso comienza con tres enteros no negativos que suman 100 y son menores que 100. Hallar la cantidad de ternas distintas que se pueden obtener aplicando la operación. Ternas que solo difieren en el orden de sus miembros se consideran la misma.

Problema 2

Se tienen varias fichas de varios colores y tamaños. No hay entre ellas dos que tengan, simultáneamente, el mismo color y el mismo tamaño. En cada ficha *F* hay escritos dos números. Uno de ellos es la cantidad de fichas que tienen el mismo color que *F* pero distinto tamaño que *F*. El otro número es la cantidad de fichas que tienen el mismo tamaño que *F* pero distinto color.
Se sabe que cada uno de los 101 números 0, 1, …, 100 está escrito al menos una vez. Determinar la menor cantidad de fichas para la que esto es posible.

Problema 3

Sea *ABCD* un paralelogramo de lados $AB = 10$ y $BC = 6$. Las circunferencias c_1 y c_2 pasan por *B* y tienen centros *A* y *C* respectivamente. Una circunferencia arbitraria con centro *D* corta a c_1 en los puntos P_1, Q_1 y a c_2 en los puntos P_2, Q_2. Hallar el cociente $\frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}$.

SEGUNDO NIVEL

XXXI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4
Hay un número escrito en cada casilla de un tablero de 13×13 de modo que los números en casillas con un lado común difieren en exactamente 1. Cada uno de los números 2 y 24 está escrito dos veces. ¿Cuántas veces está escrito el 13? Dar todas las posibilidades.

Problema 5
Sea A un punto del plano. Ana anuncia un número a tal que $0 < a \leq 1$. Luego Bernardo mueve A en una de las 4 direcciones izquierda, derecha, arriba o abajo a una nueva posición A' tal que la longitud del segmento AA' sea igual a a. Lo mismo se repite con el punto A': Ana anuncia un número a' tal que $0 < a' \leq 1$, y Bernardo mueve A' en una de las 4 direcciones izquierda, derecha, arriba o abajo a una nueva posición A'' tal que la longitud del segmento $A'A''$ es igual a a'. El proceso continúa de la misma manera tanto como desee Ana. La elección de una dirección en cada paso depende de Bernardo, con una restricción: entre todas 100 movidas consecutivas debe haber al menos una en cada una de las cuatro direcciones.
El objetivo de Ana es obtener, mediante estas jugadas de Ana y Bernardo, un punto a distancia mayor que 100 del punto original A. Decidir si ella puede lograr su objetivo con certeza.

Problema 6
Sean a, b, c enteros positivos distintos con suma 547 y sea d el máximo común divisor de los tres números $ab+1$, $bc+1$, $ca+1$. Hallar el máximo valor de d.

TERCER NIVEL

XXXI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1

Son dados 201números enteros positivos en una fila. El primero y el último de ellos son iguales a 19999. Cada uno de los restantes números es menor que el promedio de sus vecinos y la diferencia entre cada uno de los restantes números y el promedio de sus vecinos es siempre el mismo entero. Hallar el anteúltimo número de la fila.

Problema 2

Dados varios números, elegimos uno de ellos, a, y lo reemplazamos por los tres números $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}$.
A continuación se aplica la misma operación en la nueva colección de números, y así siguiendo. El proceso comienza con 1000 números 1. Diremos que un número m es *bueno* si hay m o más números iguales después de cada paso, no importa cuántas ni qué operaciones se hayan realizado. Hallar el mayor número bueno.

Problema 3

Dos circunferencias de radio 1 que no se cortan, c_1 y c_2, están dentro de un ángulo de vértice O. La circunferencia c_1 es tangente a un lado del ángulo, y la circunferencia c_2 es tangente al otro lado. Una de las tangentes interiores comunes a c_1 y c_2 pasa por O, y la otra corta a los lados del ángulo en A y B, con $AO = BO$. Hallar la distancia del punto A a la recta OB.
ACLARACIÓN: Un recta tangente a dos circunferencias c_1 y c_2 se llama *tangente interior* si una de las circunferencias está a uno de los lados de la recta y la otra está del otro lado.

TERCER NIVEL

XXXI OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4

Consideremos las sumas de 50 sumandos

$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$, $\quad T=\frac{1}{51\cdot 100}+\frac{1}{52\cdot 99}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 52}+\frac{1}{100\cdot 51}$.

Expresar el cociente $\frac{S}{T}$ como una fracción irreducible.

Problema 5

Diremos que un entero $n\geq 3$ es *especial* si no divide a $(n-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)$. Hallar todos los números especiales n tales que $10\leq n\leq 100$.

ACLARACIÓN: Para cada entero positivo *x* se define el factorial de *x* como $x!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x$, es decir, la multiplicación de todos los enteros de 1 a *x*.

Problema 6

Determinar si existen enteros positivos $a_1<a_2<\ldots<a_k$ tales que las sumas a_i+a_j, $1\leq i<j\leq k$, son distintas y hay entre ellas 1000 enteros consecutivos.