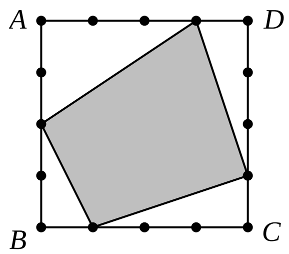
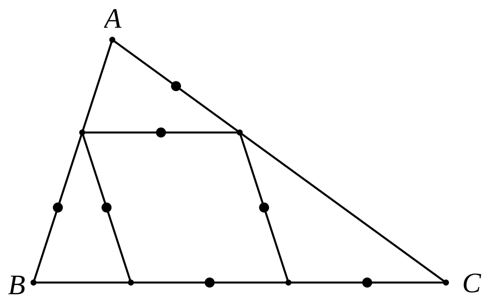
Problemas de la cuarta olimpiada iraní de geometría
Nivel Elemental: alumnos de 7º y 8º grados

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de IGO.*

1. Cada lado de un cuadrado *ABCD* de lados de longitud 4 se divide en cuatro partes iguales mediante tres puntos. Se elige uno de esos tres puntos en cada lado y se unen consecutivamente para obtener un cuadrilátero. ¿Qué números pueden ser el área de dicho cuadrilátero. Solo escriba los números sin demostración.



2. Hallar los ángulos del triángulo *ABC*.



3. En el pentágono regular *ABCDE*, la perpendicular a *CD* trazada por *C* corta a *AB* en *F*. Demostrar que $AE + AF = BE$.

4. Sean $P_1, P_2, ..., P_{100}$ cien puntos del plano entre los que no hay tres alineados. Para cada tres puntos, diremos que el triángulo que determinan es *en el sentido del reloj* si el orden creciente de sus vértices es en el sentido del reloj. ¿Puede ocurrir que la cantidad de triángulos en el sentido del reloj sea exactamente 2017?

5. En el triángulo isósceles *ABC*, con $AB = AC$, sea *l* una recta paralela a *BC* trazada por *A*. Sea *D* un punto arbitrario de *l*. Sean *E*, *F* los pies de las perpendiculares a *BD*, *CD* trazadas por *A*, respectivamente. Si *P*, *Q* son los pies de las perpendiculares a *l* trazadas por *E*, *F*, demostrar que $AP + AQ \le AB$.

Tiempo: 4 horas
Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la cuarta olimpiada iraní de geometría
Nivel Medio: alumnos de 9º y 10º grados

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de IGO.*

1. Sea *ABC* un triángulo acutángulo con $A = 60^\circ$. Sean *E*, *F* los pies de las alturas desde *B*, *C* respectivamente. Demostrar que $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

2. Dos circunferencias ω_1, ω_2 se cortan en *A*, *B*. Una recta arbitraria trazada por *B* corta a ω_1, ω_2 en *C*, *D* respectivamente. Se eligen los puntos *E*, *F* en ω_1, ω_2 respectivamente de modo que $CE = CB$, $BD = DF$. Supongamos que *BF* corta a ω_1 en *P* y *BE* corta a ω_2 en *Q*. Demostrar que *A*, *P*, *Q* están alineados.

3. Son dados *n* puntos en el plano ($n > 2$) entre los que no hay tres alineados. Por cada dos de los puntos se traza la recta que pasa por ellos, y entre todos los demás puntos dados se marca el más próximo a esta recta (en cada caso este punto resulta ser único). ¿Cuál es el número máximo posible de puntos marcados para cada valor de *n*?

4. En el triángulo isósceles *ABC*, con $AB = AC$, sea *l* una recta paralela a *BC* trazada por *A*. Sea *D* un punto arbitrario de *l*. Sean *E*, *F* los pies de las perpendiculares a *BD*, *CD* trazadas por *A*, respectivamente. Si *P*, *Q* son los pies de las perpendiculares a *l* trazadas por *E*, *F*, demostrar que $AP + AQ \leq AB$.

5. Sean *X*, *Y* dos puntos del lado *BC* del triángulo *ABC*, con *X* entre *B*, *Y*, tales que $2XY = BC$. Sea AA' el diámetro de la circunferencia circunscrita del triángulo *AXY*. Sean *P* el punto en el que *AX* corta a la perpendicular a *BC* trazada por *B*, y *Q* el punto en el que *AY* corta a la perpendicular a *BC* trazada por *C*. Demostrar que la recta tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo *AXY* trazada por A' pasa por el circuncentro del triángulo *APQ*.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la cuarta olimpiada iraní de geometría
Nivel Avanzado: alumnos de 11º y 12º grados

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de IGO.*

1. En el triángulo ABC la circunferencia inscrita, de centro I, toca al lado BC en el punto D. La recta DI corta a AC en X. La recta tangente a la circunferencia inscrita, trazada por X (diferente de AC), corta a AB en Y. Si YI y BC se cortan en Z, demostrar que $AB = BZ$.

2. Tenemos seis circunferencias que no se cortan dos a dos y son mutuamente exteriores, tales que el radio de cada una es mayor o igual que 1. Demostrar que el radio de cualquier circunferencia que corte a todas las seis circunferencias anteriores es mayor o igual que 1.

3. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La recta CO corta a la altura por A en el punto K. Sean P, M los puntos medios de AK, AC respectivamente. Si PO corta a BC en Y, y la circunferencia circunscrita del triángulo BCM corta a AB en X, demostrar que $BXOY$ es cíclico.

4. Tres circunferencias $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ son tangentes a una recta l en los puntos A, B, C (B está entre A, C) y ω_2 es tangente exterior a las otras dos circunferencias. Sean X, Y los puntos de intersección de ω_2 con la otra tangente exterior común a ω_1, ω_3. La recta perpendicular a l trazada por B corta nuevamente a ω_2 en Z. Demostrar que la circunferencia de diámetro AC es tangente a ZX, ZY.

5. La esfera S es tangente a un plano. Sean A, B, C, D cuatro puntos de dicho plano tales que no hay tres de ellos alineados. Consideramos el punto A' tal que S sea tangente a las caras del tetraedro $A'BCD$. Los puntos B', C', D' se definen de manera similar. Demostrar que A', B', C', D' son coplanares y que el plano A', B', C', D' es tangente a S.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos